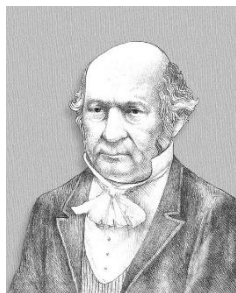


1. Vektorok, komplex számok

1.1. A térbeli vektorok fogalma, műveletek vektorokkal

Tanulási cél: a vektorok fogalmának és a velük végezhető alapvető műveletek megismerése, ezek gyakorlati használhatóságának ismertetése.

Térbeli vektorok definíciója, műveletek és ezek geometriai jelentései



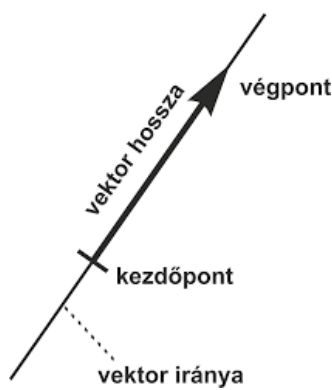
W. R. Hamilton (1805–1865) ír matematikus, csillagász és fizikus volt az, aki először használta a vektor kifejezést. A vektor elnevezés a csillagászatból került át a matematikába. Ott az ellipszis fókuszában álló Napból a bolygókhoz húzott irányított szakasz elnevezésére szolgált (vectus = húzni, vonni).

Vannak olyan mennyiségek, amelyeket a nagyságukkal egyszerűen meg tudunk határozni. Ilyenek például a tömeg, az idő, a hosszúság. Ezek megadásához elegendő egy szám és egy alkalmasan választott mértékegység. Ugyanakkor például az erő, az elmozdulás vagy a sebesség megadásához több információra is szükség van. Például ha egy test elmozdulását szeretnénk leírni, akkor meg kell mondanunk, hogy milyen irányban és mekkora távolságra mozdul el. Hasonlóan, egy test sebességének megadásához tudnunk kell, hogy milyen irányban és mekkora sebességgel halad.

Definíció: A térbeli irányított szakaszokat **vektoroknak** nevezzük. Egy vektort három adat határoz meg egyértelműen, a nagysága (hossza), az állása (melyik egyenessel párhuzamos), és az irányítása (az egyenesen merre mutat).

Definíció: Két vektor egyenlő, ha mindhárom jellemzőjük azonos, azaz ha van olyan párhuzamos eltolás, amellyel fedésbe hozhatók.

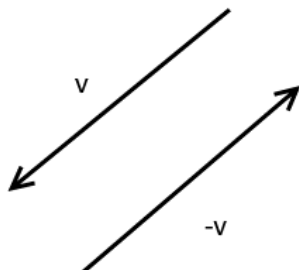
Jelölések: Ha egy $\mathbf{v}$ vektor az A kezdőpontból a B végpontba mutat, akkor a következő jelöléseket használhatjuk: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{v}$.



Definíció: A $\mathbf{v}$ vektor hosszán a vektort szemléltető szakasz hosszát értjük. Jele: $\|\mathbf{v}\|$. Ha ez az érték 1, akkor a vektort **egységvektornak** nevezzük.

Definíció: Azt a vektort, amelynek hossza 0, **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor iránya tetszőleges, azaz minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges. Jele: **0**.

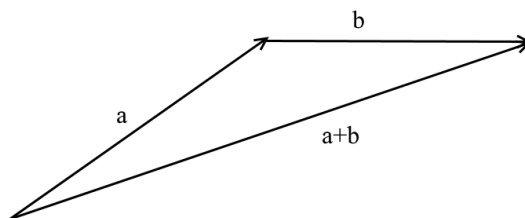
Definíció: A **v ellentettjének** nevezzük és $-v$ -vel jelöljük a v -vel egyenlő hosszúságú, azonos állású, de ellentétes irányítottságú vektort.



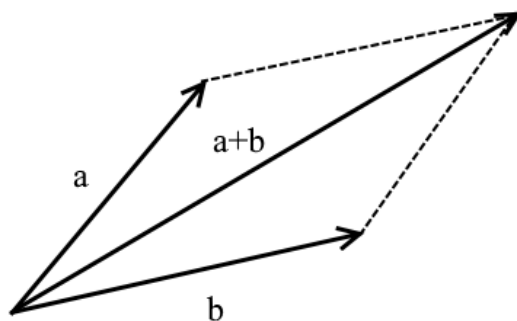
Műveletek vektorokkal

Összeadás

Definíció: Adott két vektor **a** és **b**. Az **a** és **b** vektorokat toljuk el önmagukkal párhuzamosan úgy, hogy a **b** vektor kezdőpontja az **a** vektor végpontjába kerüljön. Ekkor az **a** vektor kezdőpontjából a **b** vektor végpontjába mutató vektort az **a** és **b** vektorok összegének (eredőjének) nevezzük. Jele: **a+b**



háromszög módszer



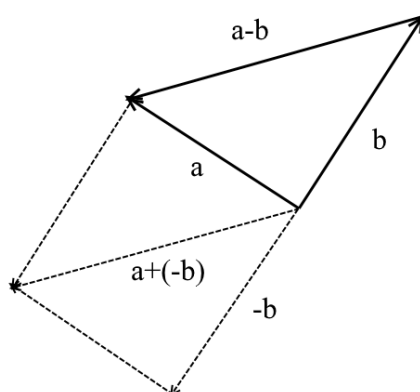
paralelogramma szabály

Tétel: A vektorok összeadása kommutatív $a+b=b+a$ és asszociatív: $(a+b)+c=a+(b+c)$ művelet.

Alkalmazás: A testek mozgásának vizsgálatakor (dinamikai és kinematikai feladatokban) a következő modellt használjuk: a testet a tömegközéppontjával helyettesítjük, és vizsgáljuk az erre ható erők eredőjét. A tömegpont nyugalomban van, ha a rá ható erők eredője zérus (Newton I. törvénye miatt; összegük nullvektor).

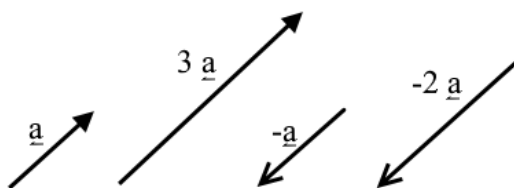
Különbség

Definíció: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségén értjük és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ -vel jelöljük azt vektort, amelyet $\mathbf{b}$ -hez adva $\mathbf{a}$ -t kapunk. (Toljuk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat közös kezdőpontba. Ekkor a $\mathbf{b}$ vektor végpontjából az $\mathbf{a}$ vektor végpontjába mutató vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségének nevezzük és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ -vel jelöljük.)



Vektorok szorzása valós számmal (skalárral)

Definíció: Az $\mathbf{a}$ nem nullvektor és a $\lambda \neq 0$ valós szám szorzatán értjük és $\lambda\mathbf{a}$ -val jelöljük azt az $\mathbf{a}$ vektorral azonos állású vektort, amelynek hossza $|\lambda|\|\mathbf{a}\|$, iránya $\lambda > 0$ esetében azonos, $\lambda < 0$ esetén pedig ellentétes az $\mathbf{a}$ vektor irányával.



A skalárral való szorzásra teljesülnek a következők:

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a}) \quad (\text{asszociativitás})$$

$$\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b} \quad (\text{disztributivitás})$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \quad (\text{disztributivitás})$$

Definíció: Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ tetszőleges vektorok, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pedig tetszőleges valós számok. Ekkor a $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ vektort a $\mathbf{v}_i$ vektorok λ_i együtthatókkal képzett lineáris kombinációjának nevezzük.

Megjegyzés: a fenti együtthatók között szerepelhetnek negatív, pozitív vagy akár nulla értékűek is.

Vektorok felbonthatósága

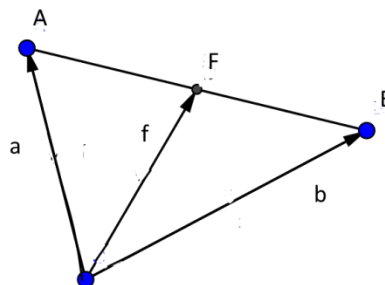
Tétel: (síkban) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nullvektoroktól különböző nem párhuzamos vektorok, akkor az általuk meghatározott sík bármely $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előállítható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$ alakban, ahol λ_1 és λ_2 egyértelműen meghatározott valós számok. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felbontható $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevőkre. Ebben az esetben szokás az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat bázisvektoroknak nevezni.

Tétel: (térben) Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ három nullvektortól különböző nem egysíkú vektor. Ekkor minden térbeli vektor egyértelműen előáll az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbf{v}$ vektorhoz egyértelműen van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számhármass, melyre $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ilyenkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokat bázisnak és ezeket az együtthatókat a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}$ bázishoz tartozó koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzés: Ez a tétel azt jelenti, hogy ha rögzítünk három nem egysíkú vektort a térben, tehát megadunk egy bázist, akkor minden vektort egyértelműen tudunk számhármassal jellemezni ebben a bázisban. A három, nem egysíkú, nullvektortól különböző vektor bármilyen lehet, tehát tetszőleges számú bázist megadhatunk. Természetesen más bázishoz, más koordináták tartoznak ugyanazon $\mathbf{v}$ vektor esetén. A továbbiakban majd egy kitüntetett bázist fogunk használni, mégpedig az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ egységnyi hosszúságú, egymásra páronként merőleges vektorokat, amelyek ebben a sorrendben **jobbsodrású rendszert** alkotnak.

Definíció: Az origóból a tér egy tetszőleges pontjába mutató vektort a pont **helyvektorának** nevezzük.

Tétel: Legyen A és B két különböző térbeli pont, jelölje F az AB szakasz felezőpontját, a megfelelő pontokba mutató helyvektorok pedig legyenek rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{f}$. Ekkor a felezőpontba mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, azaz $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.



Bizonyítás: Ezt a bizonyítást azért érdemes levezetni, mivel a benne szereplő egyszerű ötletet más feladatok megoldásánál is használni fogjuk.

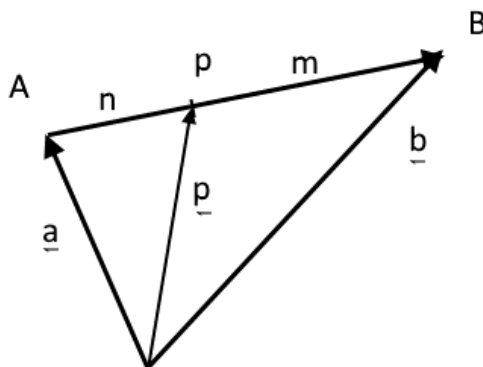
Az ábráról leolvasható a következő összefüggés: $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Elvégezve a behelyettesítést:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

Tétel: Legyen A és B két különböző térbeli pont, és P az AB szakasz azon pontja, melyre $AP:PB = n:m$. Ha a megfelelő pontokba mutató helyvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{p}$, akkor

$$\mathbf{p} = \frac{m \cdot \mathbf{a} + n \cdot \mathbf{b}}{m + n}$$



Tétel: Ha az ABC háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, akkor a háromszög súlypontjába mutató $\mathbf{s}$ helyvektor:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

1. feladat: Egy testre 100N nagyságú északi és egy 200N nagyságú nyugati irányba mutató erő hat. Mekkora és milyen irányú erővel lehet a testet nyugalomban tartani?

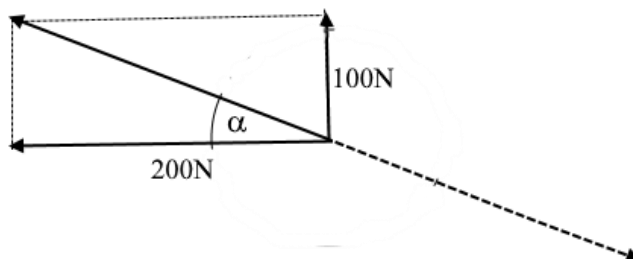
Megoldás

Mivel a két vektor merőleges egymásra, ezért az összegük (eredőjük) nagysága Pitagorasz tétellel számolható:

$$\|\mathbf{F}_e\| = \sqrt{100^2 + 200^2} \approx 223,6N$$

Meghatározzuk az eredő nyugati irányhoz képest észak felé vett hajlásszögét, melyet α -val jelölünk:

$$\tan \alpha = \frac{100}{200} \quad \alpha \approx 26,57^\circ$$

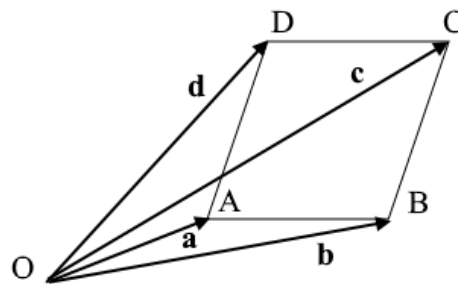


Ha a testet nyugalomban akarjuk tartani, akkor az eredővel ellentétes irányú, vele azonos nagyságú erőt kell alkalmaznunk. Tehát egy $\approx 223,6N$ nagyságú, a keleti iránytól lefelé $\approx 26,57^\circ$ -ban hajló erőre van szükség.

2. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Fejezzük ki a $\mathbf{d}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével!

Megoldás

A helyvektorok a sík egy tetszőleges pontjából az adott pontba mutató vektorok.



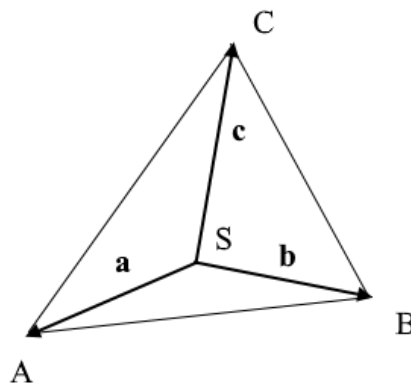
Az ábráról a következő olvasható le:

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

3. feladat: Az ABC háromszög S súlypontjából a csúcsokba mutató helyvektorok legyenek rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok összegét!

Megoldás

Készítsünk ábrát.



Legyen F az AB oldal felezőpontja, ezért $\overrightarrow{SF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$. A súlypont a súlyvonal csúcsától távolabbi

harmadoló pontja, ezért $\mathbf{c} = -2 \cdot \overrightarrow{SF} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Innen átrendezéssel a következőt kapjuk:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

4. feladat: Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen D . Szerkesszük meg a D' pontot, amelyre $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$. Állítsuk elő a $\overrightarrow{D'A}$ és $\overrightarrow{D'B}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével.

Megoldás

Mivel a feltétel szerint $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$ teljesül, ezért a D' pont a D pont A -ra vonatkozó középpontos tükröke. Ekkor

$$\overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2}$$

$$\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{2}.$$

5. feladat: Az ABC háromszögben $AB:AC = 2:3$. Az A csúcsból induló belső szögfelező a szemközti oldalt D pontban metszi. Adjuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektort $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ segítségével.

Megoldás

A feladat megoldásához ismernünk kell a szögfelezők osztásarányára vonatkozó tételt. Eszerint: Bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Ennek értelmében a D pont a BC oldalon egy ötödölő pont úgy, hogy

$$\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}.$$

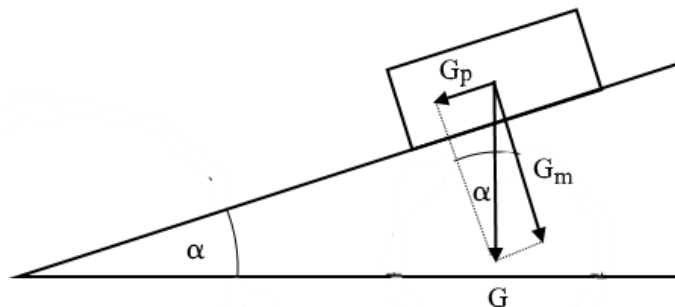
Ekkor:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{5}.$$

6. feladat: Bontsuk fel a 20° -os lejtőre helyezett 500N súlyú testre ható súlyerőt a lejtővel párhuzamos és arra merőleges összetevőre.

Megoldás

Rajzoljuk fel az ábrát.



A rajzon találunk merőleges szárú szögeket, ezért a keresett összetevők a következő módon számolhatók.

A lejtővel párhuzamos összetevő:

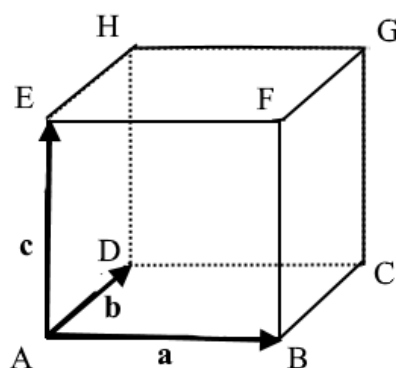
$$\sin \alpha = \frac{\|G_p\|}{\|G\|} \rightarrow \sin 20^\circ = \frac{\|G_p\|}{500N} \rightarrow \|G_p\| \approx 171N,$$

$$\cos \alpha = \frac{\|G_m\|}{\|G\|} \rightarrow \cos 20^\circ = \frac{\|G_m\|}{500N} \rightarrow \|G_m\| \approx 470N.$$

7. feladat: Az $ABCDEFGH$ kocka A csúcsából a szomszédos csúcsokba mutató vektorok legyenek: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Fejezzük ki az A csúcsból az összes többi csúcsba mutató vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével. Számoljuk ki a keresett vektorok hosszát, ha a kocka élének hossza 5 egység.

Megoldás

Készítsünk ábrát.



A vektorok hosszának kiszámításánál a Pitagorasz tételt kell alkalmazni.

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Tekintsük az $ABCDEF$ szabályos hatszöget. Az A , B , C és D csúcsba mutató helyvektorokat jelölje rendre: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Fejezzük ki az E csúcsba mutató helyvektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok segítségével!

Megoldás:

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} + \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (\text{X})$$

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

2. **kérdés:** Az $ABCD$ paralelogramma síkjának egy tetszőleges pontja O . Igaz-e a következő összefüggés: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$?

Megoldás

igen (X)
nem

3. **kérdés:** Egy egységnyi oldalú szabályos **hatszög** csúcsai: A, B, C, D, E, F , középpontja K . Legyen $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. Fejezze ki a megadott vektorok segítségével az $\overrightarrow{ED}$ és $\overrightarrow{BK}$ vektorokat. Határozza meg a keresett vektorok hosszát!

Megoldás

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = 0$$

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = 0$$

$$\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a}, \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \|\overrightarrow{ED}\| = 1, \|\overrightarrow{BK}\| = 1 \quad (\text{X})$$

4. **kérdés:** Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Állapítsa meg, hogy az alábbi vektorok közül melyek mutatnak az A -ból kiindulva valamelyik kockacsúcsba:
a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ b) $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ c) $\mathbf{b} - \mathbf{b}$ d) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}$

Megoldás

mindegyik
csak az a) nem (X)
csak b) nem
csak c) nem

5. **kérdés** Legyen P az AB szakasz A -hoz közelebbi negyedelő pontja. Ha az A és B pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a P pontba mutató helyvektor:

Megoldás

$$\frac{1}{5}(4\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\frac{1}{5}(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})$$

$$\frac{1}{4}(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (\text{X})$$

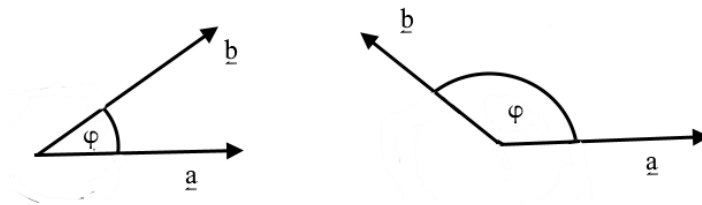
$$\frac{1}{4}(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})$$

Vektorok szorzatai

Skaláris szorzat

Gyakran szükségünk van arra, hogy ismerjük egy testre ható $\mathbf{F}$ erőnek a mozgás irányába eső összetevőjét. Megmutatjuk, hogyan lehet egyszerűen kiszámítani két vektor által közbezárt szöget. A számítás kulcsa a *skalárszorzat*nak nevezett kifejezés, amit *belső szorzatként* vagy *skaláris szorzatként* is emlegetnek. Azért beszélünk skalárszorzatról, mert az eredmény egy skalár (valós szám), nem pedig vektor. A skalárszorzat segítségével ki tudjuk számítani egy vektor másik vektorra vonatkozó vetületét és valamely állandó erő által az elmozdulás irányában végzett munkát is.

Definíció: Két egyállású vektor esetében ha a vektorok egyirányúak, akkor hajlásszögük 0° , ha pedig ellentétes irányúak, akkor hajlásszögük 180° . Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok által bezárt konvex szöget értjük.



Definíció: Tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatán az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi$ mennyiséget értjük, ahol φ a két vektor által közbezárt szög.

A skaláris szorzat tulajdonságai:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$$

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: Ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

Tétel: Két vektor hegyesszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk pozitív. Két vektor tompaszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk negatív.

A skaláris szorzat egyik fontos alkalmazási területe: adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok esetén az $\mathbf{a}$ vektort egyértelműen fel tudjuk bontani $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos és $\mathbf{b}$ -re merőleges összetevőkre.

Tétel: Legyen adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ekkor az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ irányába eső merőleges vetületvektora (az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevője):

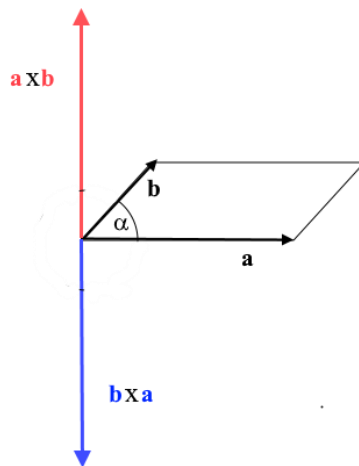
$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$$

Vektoriális szorzat

Két vektor esetében értelmezhetünk egy másféle szorzási műveletet is. Ennek a szorzásnak az eredménye egy új vektor, az elnevezése pedig vektoriális szorzat lesz.

A vektoriális szorzat fogalmát széleskörűen alkalmazzák az elektromosság, mágnesesség, az áramlástan és az égi mechanika jelenségeinek leírásában.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.



A vektoriális szorzat tulajdonságai:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

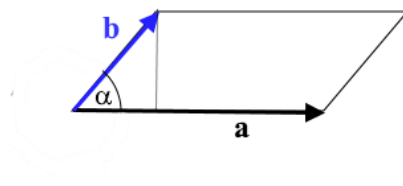
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



$$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

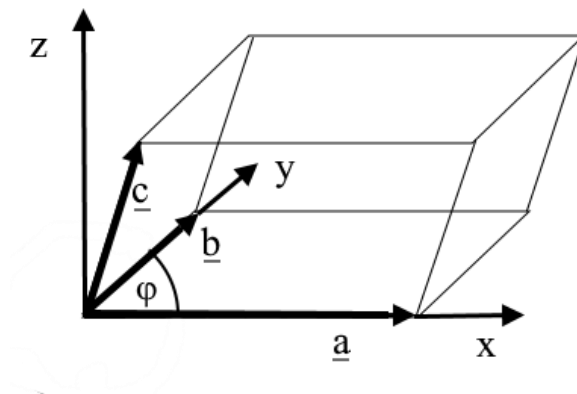
Vegyesszorzat

A vegyesszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc} = 0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |\mathbf{abc}|.$$



Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|\mathbf{abc}|}{6}.$$

8. feladat: Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két olyan vektor, melyek hajlásszöge $\frac{\pi}{6}$, valamint $\|\mathbf{a}\| = 5$ és $\|\mathbf{b}\| = 4$. Számolja ki az alábbi skaláris szorzatok értékét:

- a) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- b) $\mathbf{a}^2$
- c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$
- d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$
- e) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$

Megoldás

$$\text{a) } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \mathbf{a}^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| \cos 0^\circ = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 \approx 75,64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 &= \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 \approx 6,36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) &= \langle 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} \rangle = 3\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 6\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - 4\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \\ &= 3\|\mathbf{a}\|^2 + 4\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \frac{\pi}{6} - 4\|\mathbf{b}\|^2 = 75 + 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 64 \approx 80,28. \end{aligned}$$

9. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = 4$ és $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -10$.

Megoldás

A skaláris szorzat definíciója szerint: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \varphi$, ahol φ a két vektor által bezárt szög. Innen:

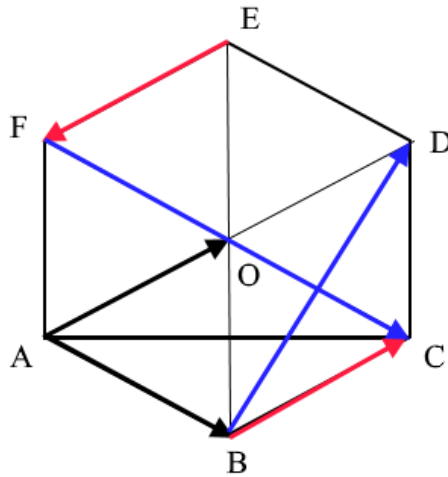
$$\cos \varphi = \frac{-10}{5 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 120^\circ.$$

10. feladat: Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza 10, a hatszög középpontja O . Számítsa ki a következő skaláris szorzatokat:

$$\langle \overline{AB}, \overline{AO} \rangle, \langle \overline{AB}, \overline{AC} \rangle, \langle \overline{BC}, \overline{EF} \rangle, \langle \overline{FC}, \overline{BD} \rangle, \langle \overline{FC}, \overline{EF} \rangle.$$

Megoldás

Rajzoljuk fel a szabályos hatszöget.



$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \rangle = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50.$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 10 \cdot 10 \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 100 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 150.$$

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF} \rangle = 10 \cdot 10 \cdot \cos 180^\circ = -100.$$

$$\langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 20 \cdot 10 \sqrt{3} \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$\langle \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{EF} \rangle = 20 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 200 \cdot (-0,5) = -100.$$

11. feladat: Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szöge, ha $\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = 0,5$.

Megoldás

Az egyenlet bal oldalán végezzük el a műveleteket és használjuk ki az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 = 1$ és $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\|^2 = 1$ összefüggést:

$$\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - 1\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - 4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 2 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + 2 = 4 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Eszerint:

$$4 - 5\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0,5 \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{3,5}{5} \rightarrow \varphi = 45,57^\circ.$$

12. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét, ha a két vektor egymással 30° -os szöget zár be és $\|\mathbf{a}\| = 5$ valamint $\|\mathbf{b}\| = 10$!

Megoldás

Tudjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám, azaz

$$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi = 5 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 25.$$

13. feladat: Tekintsük az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektorokat. Milyen eredményt ad a $(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$ művelet?

Megoldás

A keresett művelet eredménye egy vektor lesz, mivel két vektoriális szorzatot kell egymás után elvégezni. Tudjuk, hogy a vektoriális szorzat eredménye egy vektor, így ezt kétszer egymás után elvégezve is egy vektort kapunk. Ha a jobbsodrású koordináta rendszerre gondolunk, akkor tudjuk, hogy

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{k}$$

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = -(-\mathbf{i}) = \mathbf{i}.$$

14. feladat: Tekintsük az $ABCDEF$ szabályos hatszöget, melynek oldaléle 15 cm hosszú. Mivel egyenlő az $\overrightarrow{ABBCCD}$?

Megoldás

Tudott, hogy az $\overrightarrow{ABBCCD}$ vegyesszorzat abszolút értéke az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja meg. Ebben az esetben, mivel ezek a vektorok egy szabályos hatszög oldal vektorai, ezért ezek egy síkban vannak. Ha a vektorok egy síkban vannak, akkor nem feszítenek ki testet, tehát a vegyesszorzat értéke nulla.

Eszerint:

$$\overrightarrow{ABBCCD} = 0.$$

Ellenőrző kérdések

6. kérdés Ha az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög oldalainak hossza 10 egység, akkor mivel egyenlő $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle$?

Megoldás

- $50\sqrt{2}$
- $-50\sqrt{2}$ (X)
- 50
- 50

7. kérdés: Ha az $ABCD$ paralelogramma AB oldala 6 egység, akkor mivel egyenlő $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\|$?

Megoldás

- 0 (X)
- 3
- 6
- 9

8. kérdés: Mivel egyenlő $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$?

Megoldás

- 0
- $\mathbf{j}$
- $-\mathbf{j}$ (X)
- 1

9. **kérdés** Ha az ABC szabályos háromszög oldalainak hossza 2 egység, akkor mivel egyenlő az $\overrightarrow{ABBCCA}$?
- 8
4
2
0 (X)

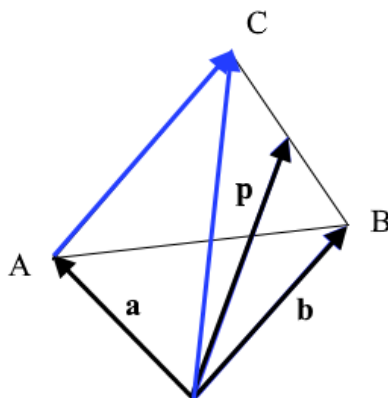
Összetett feladatok

15. **feladat:** Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az $\mathbf{a}$, a B csúcsba a $\mathbf{b}$, a BC szakasz felezőpontjába pedig a $\mathbf{p}$ vektor mutat. Állítsuk elő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{p}$ segítségével :

- a) az O -ból a C -be vezető vektort
b) az $\overrightarrow{AC}$ vektort.

Megoldás

Készítsünk ábrát!



- a) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$
 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$
- b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{p} - \mathbf{b} - \mathbf{a}$

16. **feladat:** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.

Megoldás

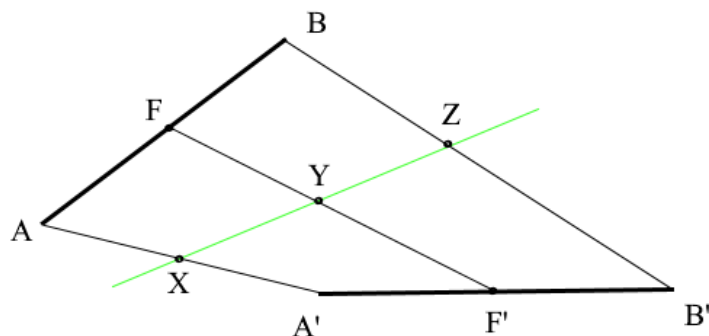
Abban az esetben, ha a két vektor nem párhuzamos, akkor megszerkesztve az összegüket és a különbségüket lényegében egy rombusz két átlóját kapjuk. Az elemi geometriából ismert, hogy ezek egymásra merőlegesek.

Ha a két vektor párhuzamos, akkor vagy azonos irányúak, vagy ellentétesek.

Ha azonos irányúak, akkor a különbségük **0**, ha ellentétes irányúak, akkor pedig az összegük **0**. Mivel a **0** vektor iránya tetszőleges, ezért a **0** vektor bármely vektorra merőleges is, ezzel az állítást igazoltuk.

17. feladat: AB és $A'B'$ tetszőleges szakaszok, ezek felezőpontja F és F' . Igaz-e, hogy az AA' , BB' és FF' szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak!

Megoldás



Legyen X az AA' , Y az FF' és Z a BB' szakasz felezőpontja.

Legyenek az A, B, F, A', B', F' pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ és $\mathbf{f}'$.

Ekkor:

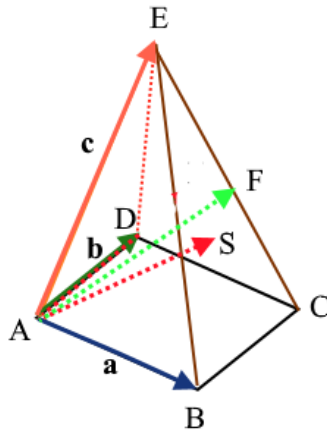
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2} & \overrightarrow{OZ} &= \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}, \\ \overrightarrow{OY} &= \frac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF'}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'}{2}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}}{2}.\end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy Y felezőpontja az XZ szakasznak, tehát X, Y és Z egy egyenesen vannak.

18. feladat: Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplappja az $ABCD$ négyzet. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal:

- a $\overrightarrow{DE}$ vektort
- az A csúcsból a CE él felezőpontjába mutató vektort
- az A csúcsból a BCE oldallap súlypontjába mutató vektort.

Megoldás



- a) A $\overrightarrow{DE}$ vektor felírható két vektor különbségeként:

$$\overrightarrow{DE} = \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

- b) A CE él, mint szakasz F felezőpontjába mutató vektort akkor tudjuk könnyen meghatározni, ha ismerjük a CE szakasz két végpontjába mutató azon helyvektorokat, amelyek az A csúcsból indulnak. A vektorok összeadására vonatkozó szabály alapján:

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A szakasz felezőpontba mutató vektor:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}.$$

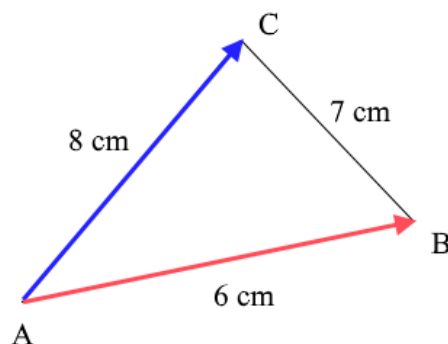
- c) Az A csúcsból a BCE oldallap súlypontjába mutató vektort akkor tudjuk előállítani, ha ismerjük a B , C és E csúcsokba mutató, A pontból induló helyvektorokat. Felhasználva az előző eredményeket:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A BCE oldallap súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$$

- 19. feladat:** Az ABC háromszögben $AB=6\text{cm}$, $BC=7\text{cm}$ és $AC=8\text{cm}$. Határozzuk meg az $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ értékét!



Megoldás

A skaláris szorzat kiszámításához szükségünk van a két vektor által közbezárt szögre. Jelen esetben ez a háromszög A csúcsánál lévő szöge. Mivel ez egy általános háromszög, ezért ezt a szöveget koszinusztétellel tudjuk kiszámolni. A szokásos betűzést használva:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$7^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{17}{32} \rightarrow \alpha \approx 57,91^\circ.$$

A keresett skaláris szorzat:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 6 \cdot 8 \cdot \cos 57,91^\circ = 25,2.$$

Megjegyzés: Mivel a skaláris szorzat számolásánál a szög koszinuszára van szükség, ezért nem szükséges magát a szöveget kiszámolni. Megállhatunk a $\cos \alpha = \frac{17}{32}$ összefüggésnél, ezt helyettesítjük be a skaláris szorzatba, ezáltal pontos eredményt kapva.

20. feladat: A k paraméter mely értékénél lesznek merőlegesek egymásra az $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) vektorok?

Megoldás

Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla, tehát a

$$\langle \mathbf{a} + k\mathbf{b}, \mathbf{a} - k\mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Kihhasználva a skaláris szorzat tulajdonságait és az egyenlet bal oldalát átalakítva:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - k \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + k \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - k^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenlethez jutunk.

Ebből:

$$\|\mathbf{a}\|^2 - k^2 \|\mathbf{b}\|^2 = 0,$$

tehát

$$k = \pm \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

21. feladat: Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe 6 egység, akkor mekkora a területe a $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogrammának?

Megoldás

Tudjuk, hogy a paralelogramma területe egyenlő az őt kifeszítő két vektor vektoriális szorzatának abszolút értékével. Tehát a keresett terület:

$$T = \|\mathbf{c} \times \mathbf{d}\|.$$

Behelyettesítve:

$$T = \|(4\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})\|.$$

Először bontsuk fel a belső zárójeleket. Minden tagot minden taggal meg kell szorozni, de ügyelni kell arra, hogy a vektoriális szorzatnál számít a tényezők sorrendje:

$$T = \|4(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 20(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 5(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\|.$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \sin 0^\circ = 0,$$

valamint:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

Így a keresett terület:

$$T = \|4(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 20(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 5(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\| = \|21(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\| = 21 \cdot 6 = 126 \text{ területegység}.$$

22. feladat: Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység, akkor mennyi a térfogata az $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedonnak?

Megoldás

Mivel a paralelepipedon térfogata az öt kifeszítő vektorok vegyesszorzatának abszolút értékével egyenlő, ezért

$$V = |\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}|.$$

Behelyettesítve:

$$V = |(2\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + 3\mathbf{c})(2\mathbf{b} - \mathbf{c})|.$$

A vegyesszorzat definíciója szerint a keresett térfogatot tovább alakítva:

$$V = |\langle (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}), (2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \rangle|.$$

Végezzük el először külön csak a vektoriális szorzást:

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Kihasználva, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) = 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Helyettesítsük ezt vissza a keresett térfogatba:

$$\begin{aligned} V &= |\langle 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), (2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \rangle| = \\ &= |\langle 12(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle - 6\langle (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{c} \rangle - 2\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle + \langle (\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{c} \rangle - 6\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle + 3\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{c} \rangle| \end{aligned}$$

Felhasználva a vegyesszorzat jelölési módot, folytatva az átalakítást:

$$V = |12\mathbf{acb} - 6\mathbf{acc} - 2\mathbf{bab} + \mathbf{bac} - 6\mathbf{bcb} + 3\mathbf{bcc}|$$

Mivel három egysíkú vektor vegyes szorzata 0, ezért mindegyik tag, amelyben van ismétlődő vektor, az 0 lesz. (ha három vektor közül kettő azonos, akkor a három vektor biztosan egysíkú)

$$V = |12\mathbf{acb} + \mathbf{bac}|.$$

Felhasználva, hogy $\mathbf{acb} = -\mathbf{abc}$ és $\mathbf{bac} = -\mathbf{abc}$

$$V = |-12\mathbf{abc} - \mathbf{abc}| = |-13\mathbf{abc}| = 13|\mathbf{abc}|.$$

Mivel az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység ezért

$$V = 13 \cdot 5 = 65.$$

Ellenőrző kérdések

10. kérdés: Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet köré írt körének egy tetszőleges (a csúcsoktól különböző) P pontjából a csúcsokhoz húzott helyvektorai legyenek:

$\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}$. Mivel egyenlő $\langle \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} \rangle$?

0

1

-1

2 (X)

11. kérdés: Az előző feladatban szereplő négyzetet tekintve, mivel egyenlő

$\langle \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD} \rangle$?

0 (X)

1

-1

2

12. kérdés: Mekkora szöget zárnak be az **a** és **b** egységvektorok, ha tudjuk, hogy **5a-4b** és az **a+2b** vektorok merőlegesek egymásra?

30°

45°

60° (X)

120°

13. kérdés: Ha az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 19 egység, akkor mennyi a térfogata az **a-b**, **a+b**, **b+2c** vektorok által kifeszített paralelepipedonnak?

38

57

76 (X)

95

2. Vektorok, komplex számok

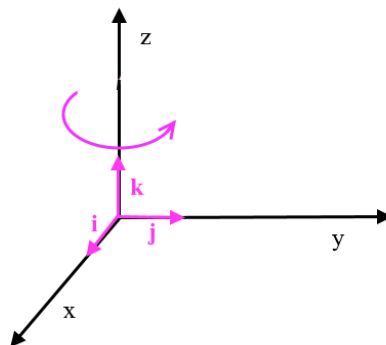
2.2 Vektorok koordinátás alakja

Tanulási cél: ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a koordinátákkal megadott vektorokkal hogyan kell az eddig megismert fogalmakat értelmezni és a műveleteket elvégezni.

Descartes-féle koordináta rendszer, vektorok koordinátás alakja

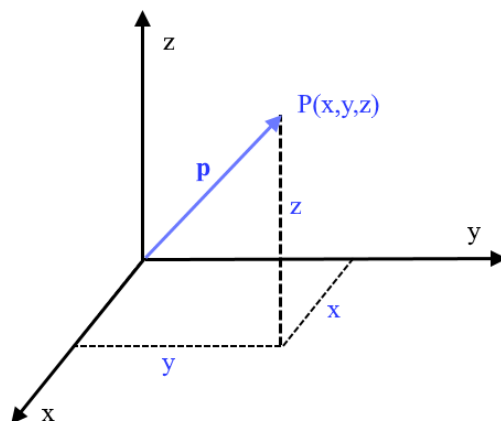
A Descartes-féle koordináta-rendszerben a három tengely egymásra merőleges, és egy pont helyzetét – koordinátáit – az x , y és z tengelyektől mért távolsága határozza meg. A tengelyek metszéspontja az origó. Az origóból kiinduló, és a tengelyek irányába mutató, egymásra kölcsönösen merőleges egységvektorokat nevezzük alapvektoroknak vagy bázisvektoroknak. Az origóból az $(1, 0, 0)$ pontba mutató (x irányú) egységvektor jele $\mathbf{i}$, a $(0, 1, 0)$ pontba mutató (y irányú) egységvektor jele $\mathbf{j}$, míg a $(0, 0, 1)$ pontba mutató (z irányú) egységvektor jele a $\mathbf{k}$.

Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységnyi hosszú, egymásra páronként merőleges vektorok ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. Ez azt jelenti, hogy ha a $\mathbf{k}$ vektor irányával szemben nézve letekintünk az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ vektorok által kifeszített síkra, akkor ezen a síkon az $\mathbf{i}$ vektort az óramutató járásával ellentétes irányú 90 szögű forgatás viszi a $\mathbf{j}$ vektorba.



Az előző fejezetben tárgyalt, vektorok egyértelmű felbonthatóságára vonatkozó tétel alapján, egy $P(x, y, z)$ pontba mutató helyvektor egyértelműen felírható a tengelyeken vett egységvektorok (bázisvektorok) lineáris kombinációjaként $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban.

Ekkor az (x, y, z) rendezett számhármast a $\mathbf{p}$ vektor Descartes koordinátáinak nevezzük, szokásos jelölés: $\mathbf{p} = (x, y, z)$



Műveletek koordinátákkal (összeadás, kivonás, skalárral való szorzás)

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda (a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Tétel: Legyen $A = (a_1, a_2, a_3)$ és $B = (b_1, b_2, b_3)$ két tetszőleges pont, továbbá $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az adott pontokba mutató helyvektorok. Ekkor

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

1. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_e$ vektorokat, ha $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (-3, 4, -2)$! (jelölje $\mathbf{a}_e$ az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort)

Megoldás

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 2, 3) + (-3, 4, -2) = (-2, 6, 1)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2, 3) - (-3, 4, -2) = (4, -2, 5)$$

$$3\mathbf{a} = 3(1, 2, 3) = (3, 6, 9)$$

$$2\mathbf{b} - 4\mathbf{a} = 2(-3, 4, -2) - 4(1, 2, 3) = (-10, 0, -16)$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Jelölje $\mathbf{a}_e$ az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort. Ekkor

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

2. feladat: Döntsük el, hogy párhuzamosak-e az adott vektorpárok:

a) $\mathbf{a} = (-4, 12, 8)$ és $\mathbf{b} = (-2, 6, 4)$

b) $\mathbf{a} = (9, 3, 12)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, 5)$

Megoldás

Két vektor párhuzamos, ha az egyik vektor előáll a másik nullától különböző számszorosaként, azaz ha létezik olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

a) Könnyen látható, hogy ebben a részben a $\lambda = 2$ értéket választva, $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, tehát ezek a vektorok párhuzamosak.

Észrevehető, hogy ha $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, akkor $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ összefüggés is teljesül, azaz a

vektorok azonos indexű koordinátáinak hányadosai egyenlők. Ezzel a módszerrel:

$$2 = \frac{-4}{-2} = \frac{12}{6} = \frac{8}{4}.$$

b) Kihasználva, hogy ha az azonos indexű koordináták hányadosai egyenlők, akkor az egyik vektor a másik számszorosa, azaz párhuzamosak. Ebben az esetben:

$$\frac{9}{3} = \frac{3}{1} \neq \frac{12}{5}.$$

Tehát ez a két vektor nem párhuzamos.

3. feladat: Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi pontok egy egyenesre esnek-e? $A(1, -2, 3)$, $B(-1, 1, -1)$ és $C(-3, -2, 3)$.

Megoldás

A három pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak egymással. (Természetesen itt másképpen is ki lehetne választani két-két vektort.)

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{c}$ az A , B és C pontokban mutató helyvektorok. Ekkor:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4) \text{ és } \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-4, 0, 0).$$

Mivel:

$$\frac{-4}{-2} \neq \frac{0}{3} = \frac{0}{-4},$$

ezért a három pont nem esik egy egyenesre.

4. feladat: Az előző feladatban megadott pontok nincsenek egy egyenesen, tehát egy háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög területét!

Megoldás

A terület kiszámításához ismerni kell mindhárom oldal hosszát. Az oldalak hossza nem más, mint az adott pontok távolsága. Az A és B pontok távolsága az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával egyezik meg.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}.$$

Hasonlóan számoljuk a másik két oldal hosszát is:

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-4, 0, 0) \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (-2, -3, 4) \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

A háromszög területe:

$$K = \sqrt{29} + 4 + \sqrt{29} \approx 14,77.$$

5. feladat: Határozzuk meg az AB szakasz F felezőpontját és az A -hoz közelebb eső H_A harmadoló pontjának koordinátáit, ha $A(4,1,-2)$ és $B(3,-1,1)$!

Megoldás

Használjuk fel, hogy az F pontba mutató $\mathbf{f}$ helyvektor felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ alakban. Mivel ez egy vektoriális egyenlet, ez az összefüggés a koordinátákra külön-külön is felírható, azaz

$$f_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad f_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}.$$

Tehát:

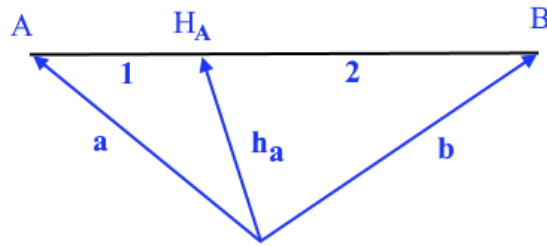
$$f_1 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \quad f_2 = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \quad f_3 = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

A kapott eredmények alapján a felezőpont:

$$F\left(\frac{7}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

A H_A pontba mutató $\mathbf{h}_a$ helyvektor szintén felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével:

$$\mathbf{h}_a = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$



Elvégezve a számolást:

$$\mathbf{h}_a = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} = \frac{2}{3}(4, 1, -2) + \frac{1}{3}(3, -1, 1) = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

Tehát a keresett harmadoló pont koordinátái:

$$H_A\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

6. feladat: Adott az $\mathbf{a} = (-4, 3, 0)$ vektor. Állítsuk elő

- az $\mathbf{a}$ -val azonos irányú $\mathbf{a}_e$ egységnyi hosszúságú vektort
- az $\mathbf{a}$ -val ellentétes irányú, 8 hosszúságú $\mathbf{b}$ vektort!

Megoldás

a) Tudjuk, hogy

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a},$$

ezért ebbe az összefüggésbe behelyettesítve:

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2}}(-4, 3, 0) = \frac{1}{5}(-4, 3, 0) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

- Először adjuk meg az $\mathbf{a}$ vektorral azonos irányú, irányítottságú és egységnyi hosszúságú $\mathbf{a}_e$ vektort. Ezt az előző részben számoltuk ki,

$$\mathbf{a}_e = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right).$$

Ezt az egységnyi hosszúságú vektort nyújtjuk meg 8 egységre:

$$8\mathbf{a}_e = 8\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) = \left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right)$$

Képezzük az ellentett vektorát, azaz szorozzuk meg (-1) -gyel:

$$\mathbf{b} = -1(8\mathbf{a}_e) = -1\left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right) = \left(\frac{32}{5}, -\frac{24}{5}, 0\right).$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés Az AB szakasz felezőpontja F . Ha $A(11, -3, -4)$ és $F(-2, 1, 3)$ akkor B pont

$$B(4, 5, -1, -1, 5)$$

$B(7,5, -2, -7,5)$
 $B(-15,5,10)$ (X)
 $B(-15,5,1)$

2. **kérdés:** Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma D csúcsát, ha $A(1,2,3)$, $B(-1,1,-3)$ és $C(5,-4,5)$!

$D(7, -3,-10)$
 $D(7,-3,-11)$ (X)
 $D(-5,7,-5)$
 $D(7,-3,-5)$

3. **kérdés:** Egy egyenesre illeszkedik-e a következő három pont: $A(1, -1, 5)$, $B(3, 3, 3)$ és $C(0, -3, 4)$?

igen
nem (X)

4. **kérdés:** Határozza meg az $\mathbf{a} = (-1,1,2)$ irányába mutató egységnyi hosszúságú vektor koordinátáit!

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$
 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
 $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ (X)
 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

5. **kérdés:** Határozza meg az AB szakasz B -hez közelebbi harmadoló pontjának koordinátáit, ha $A(1, 1, -1)$ és $B(3, -1, 2)$!

$\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ (X)
 $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$
 $\left(3, 0, \frac{2}{3}\right)$
 $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Vektorok skaláris szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatán az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \varphi$ mennyiséget értjük, ahol φ a két vektor által közbezárt szög.

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

A skaláris szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Megjegyzés: ortonormált bázisvektorok esetén $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = 0$.

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ nullvektortól különböző két vektor. Ekkor az általuk közbezárt szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Következmény: Ha

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$ akkor a két vektor hegyesszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0$ akkor a két vektor tompaszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ akkor a két vektor merőleges egymásra.

Tétel: Legyen adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ekkor az $\mathbf{a}$ vektor egyértelműen felbontható $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{a}_p$) és $\mathbf{b}$ vektorra merőleges összetevőkre ($\mathbf{a}_m$), ahol

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p.$$

7. feladat: Határozzuk meg a következő vektorpárok szögét:

a) $\mathbf{a} = (5, -1, 2)$ $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$

b) $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$ $\mathbf{b} = (3, 6, 0)$

c) $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$ $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$

Megoldás

Jelöljük a két vektor által közbezárt szöget φ -el. Ekkor a

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

összefüggés alapján fogunk számolni.

a) Ha $\mathbf{a} = (5, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$, akkor

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{10}{\sqrt{30} \sqrt{14}} \approx 0,4880 \rightarrow \varphi \approx 60,79^\circ. \end{aligned}$$

b) Ha $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 6, 0)$, akkor

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{4 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 2 \cdot 0}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{0}{\sqrt{24} \sqrt{45}} = 0 \rightarrow \varphi = 90^\circ. \end{aligned}$$

c) Ha $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$, akkor

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{(-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{-3}{\sqrt{9} \sqrt{14}} \approx -0,2673 \rightarrow \varphi \approx 105,50^\circ. \end{aligned}$$

8. feladat: Adjuk meg z értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra, ha $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (4, -1, z)$.

Megoldás

Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát úgy kell z értékét megválasztani, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ teljesüljön.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot z = 0 \rightarrow -7 + 2z = 0 \\ z &= 3,5. \end{aligned}$$

9. feladat: Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb szögét, ha $A(1, 1, 0)$, $B(-2, -1, 1)$ és $C(2, 1, -1)$!

Megoldás

Mivel csak a legnagyobb szög a kérdés, jó lenne eldönteni, melyik csúcsnál található, különben mindegyik szöget ki kell számolnunk, s kiválasztani a legnagyobbat. Mivel a háromszögekben

nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, a legnagyobb szög a legnagyobb oldallal szemben lesz. Az oldalak hosszának meghatározásához írjuk fel az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokat.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 1) \rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1) \rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (4, 2, -2) \rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24}.$$

Mivel BC a leghosszabb oldal, ezért az A csúcsnál lévő α szög a háromszög legnagyobb szöge. Ez a szög lényegében az AB és AC vektorok által bezárt szög, így:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{14} \sqrt{2}} = \\ &= \frac{-4}{\sqrt{14} \sqrt{2}} \approx -0,7559 \rightarrow \alpha \approx 139,10^\circ. \end{aligned}$$

10. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} = (2, -3, -6)$, $\mathbf{b} = (6, -2, 3)$ és $\mathbf{c} = (3, 6, -2)$ vektorok kockát feszítenek ki!

Megoldás

Ez úgy értendő, hogy ha a három vektort közös kezdőpontból mérjük fel, akkor egy kocka egy csúcsból induló három élvektorát kapjuk.

Ennek teljesüléséhez az szükséges, hogy a vektorok hossza azonos legyen, s egymásra páronként merőlegesek legyenek, azaz bármelyik merőleges legyen bármelyikre.

Számoljuk először a vektorok hosszát:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

A másik két vektor hossza is ugyanennyi, hiszen a koordináták csak fel vannak cserélve, valamint az előjelek változnak, de ez a négyzet miatt nem számít.

Már csak a páronkénti merőlegességet kell ellenőrizni. A merőlegességhez az kell, hogy bármely két vektor skaláris szorzata 0 legyen.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) + (-6) \cdot 3 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 6 + (-6) \cdot (-2) = 0$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 6 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0.$$

Mivel a merőlegességek is teljesülnek, ezért ezek a vektorok valóban kockát feszítenek ki.

11. feladat: Bontsuk fel az $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ vektort a $\mathbf{b} = (-3, -1, 1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre!

Megoldás

A feladathoz lényegében két képletet kell ismernünk:

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p.$$

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1}{\left(\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)^2} (-3, -1, 1) = \frac{-8}{11} (-3, -1, 1) = \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right)$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p = (2, 1, -1) - \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right) = \left(-\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{3}{11}\right).$$

Ellenőrző kérdések

6. kérdés Számítsa ki az $\mathbf{a} = (-2, 0, 1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 3, 2)$ vektorok skaláris szorzatát!

- 3
- 4 (X)
- 4
- 5

7. kérdés Igaz-e, hogy az $\mathbf{a} = (-2, -3, 1)$ és $\mathbf{b} = (2, 3, -1)$ vektorok merőlegesek egymásra?

- igen
- nem (X)

8. kérdés Mekkora a két vektor hajlásszöge, ha $\mathbf{a} = (-1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$?

- 157,79° (X)
- 0°
- 22,21°
- 67,79°

9. kérdés Mivel egyenlő y , ha az $\mathbf{a} = (-1, 3, -2)$ két $\mathbf{b} = (1, y, 1)$ vektorok merőleges egymásra?

- 2
- 1
- 1 (X)
- 0

10. kérdés Határozza meg a $\mathbf{b} = (-1, -2, -2)$ vektor $\mathbf{a} = (-1, 1, -2)$ vektorral párhuzamos összetevőjének koordinátáit!

- $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
- $\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \quad (\text{X})$$

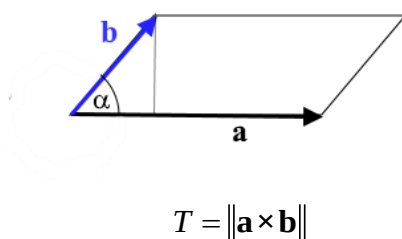
Vektorok vektoriális szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

A vektoriális szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{i} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{j} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{k} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

12. feladat: Számítsa ki az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ értéket, ha $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 0, 2)$!

Megoldás

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0] \mathbf{i} - [2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)] \mathbf{j} + [2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)] \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Tehát:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, -3, 1).$$

13. feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma területét és C csúcsának koordinátáit, ha $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 0, 3)$ és $D(1, 4, 1)$!

Megoldás

A paralelogrammát lényegében az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok feszítik ki. Tudott összefüggés, hogy ebben az esetben a paralelogramma területe:

$$T = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|.$$

Állítsuk elő ezeket a vektorokat, ha a csúcsokba mutató helyvektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektorokkal jelöljük.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, -1, 3) \quad \overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = (0, 3, 1)$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot 1 - 3 \cdot 3]\mathbf{i} - [(-2) \cdot 1 - 3 \cdot 0]\mathbf{j} + [(-2) \cdot 3 - 1 \cdot 0]\mathbf{k} = \\ &= -10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$T = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|-10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\| = \sqrt{(-10)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{140}.$$

A C csúcs koordinátáinak meghatározásánál használjuk ki azt, hogy a paralelogramma átlói felezi egymást. Ez a közös felezőpont a paralelogramma középpontja, jelöljük K -val.

K felezőpontja a BD átlónak ezért:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-1+1}{2} & k_1 &= 0 \\ k_2 &= \frac{0+4}{2} & k_2 &= 2 \\ k_3 &= \frac{3+1}{2} & k_3 &= 2, \end{aligned}$$

azaz

$$K(0, 2, 2).$$

Mivel K az AC átlónak is felezőpontja, ezért:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1+c_1}{2} & c_1 &= -1 \\ 2 &= \frac{1+c_2}{2} & c_2 &= 3 \\ 2 &= \frac{0+c_3}{2} & c_3 &= 4. \end{aligned}$$

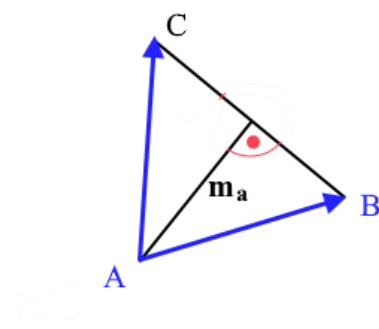
Tehát a keresett C csúcs:

$$C(-1, 3, 4).$$

14. feladat: Határozzuk meg az ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonalának hosszát, ha $A(3, -3, 4)$, $B(-1, 2, 4)$ és $C(-1, 6, 1)$!

Megoldás

Készítsünk ábrát.



A megoldás során használjuk ki, hogy a háromszög területét kétféleképpen is ki tudjuk számolni:

$$T = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|,$$

valamint

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2},$$

ahol a szokásos jelölést megtartva $a = \|\vec{BC}\|$, m_a pedig az A csúcsból induló magasság. Mivel a kétféleképpen felírt terület megegyezik, ezért:

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{BC}\| m_a$$

ahonnan:

$$m_a = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{BC}\|}.$$

Állítsuk elő a számoláshoz szükséges vektorokat.

$$\vec{AB} = (-4, 5, 0) \quad \vec{AC} = (-4, 9, -3) \quad \vec{BC} = (0, 4, -3)$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = [5 \cdot (-3) - 0 \cdot 9] \mathbf{i} - [(-4) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4)] \mathbf{j} + [(-4) \cdot 9 - 5 \cdot (-4)] \mathbf{k} = \\ &= -15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \\ m_a &= \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{BC}\|} = \frac{\sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2}}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5. \end{aligned}$$

Vektorok vegyesszorzata

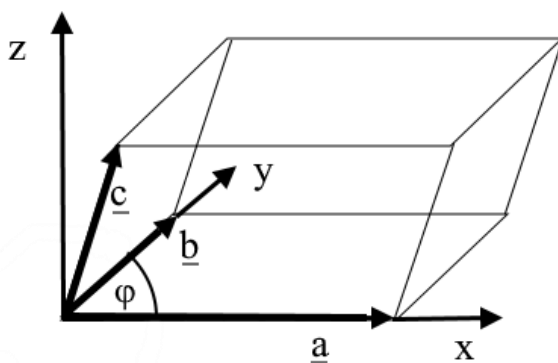
Emlékeztető az 1. leckéből:

A vegyesszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc}=0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |\mathbf{abc}|.$$



Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|\mathbf{abc}|}{6}.$$

15. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{abc}$ értékét, ha $\mathbf{a} = (2, -4, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 5)$ és $\mathbf{c} = (-2, 3, 1)$.
Egysíkúak-e ezek a vektorok?

Megoldás

Tudjuk, hogy $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Először az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort számoljuk ki.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [(-4) \cdot 5 - 3 \cdot (-1)]\mathbf{i} - [2 \cdot 5 - 3 \cdot 1]\mathbf{j} + [2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1]\mathbf{k} = \\ &= -17\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

A most kapott vektort skalárisan szorozzuk $\mathbf{c}$ -vel:

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (-17, -7, 2), (-2, 3, 1) \rangle = (-17) \cdot (-2) + (-7) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 15.$$

Mivel a vegyesszorzat nem lett nulla, ezért ezek a vektorok nem egysíkúak.

16. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ és $\mathbf{c} = (-1, 2, -5)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

Megoldás

Tudjuk, hogy a $V_p = |\mathbf{abc}|$, azaz ki kell számolni a három vektorok vegyesszorzatát, majd az eredmény abszolút értékét kell venni. A számolást most is két lépésben fogjuk elvégezni.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (2, -10, 2), (-1, 2, -5) \rangle = -32.$$

Ebből a keresett térfogat:

$$V = |-32| = 32.$$

17. feladat: Egysíkúak-e az alábbi pontok: $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(2, 0, -2)$ és $D(1, 1, -2)$?

Megoldás

Ha a négy pont egy síkban van, akkor az egyik pontból a másik három pontba irányított vektor is egy közös síkban van. Ez az állítás fordítva is igaz. Ha kiválasztjuk az A pontot, és képezzük az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat, akkor ha ezen vektorok vegyesszorzata nulla értéket ad, akkor a vektorok egysíkúak, de ekkor a pontok is olyanok.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2) \quad \overrightarrow{AD} = (0, 2, -2).$$

Képezzük az

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-3, -3, -3), (0, 2, -2) \rangle = 0.$$

Mivel a három vektor vegyesszorzata nulla, ezért a három vektor egysíkú. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha az eredeti négy pont is egysíkú.

18. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $A(1, -1, 0)$, $B(-6, 0, -1)$, $C(-2, -4, 1)$ és $D(-2, -4, -3)$?

Megoldás

Tudjuk, hogy a tetraéder térfogata vegyesszorzat segítségével számolható, ha rendelkezünk egy közös csúsból induló három élvektorral. Ennek érdekében válasszuk ki az A csúcsot, és határozzuk meg a többi csúcsba mutató élvektort.

$$\overrightarrow{AB} = (-7, 1, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (-3, -3, 1) \quad \overrightarrow{AD} = (-3, -3, -3)$$

Képezzük először az

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 24\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2, 10, 24), (-3, -3, -3) \rangle = -96.$$

Innen a tetraéder térfogata:

$$V_t = \frac{|\overrightarrow{ABACAD}|}{6} = \frac{|-96|}{6} = 16.$$

Ellenőrző kérdések

11. kérdés: Mivel egyenlő $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ha $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ és $\mathbf{b} = (0, -2, 1)$?

- (2, 1, 2) (X)
- (2, -1, 2)
- (-2, -1, -2)
- (-2, 1, -2)

12. kérdés: Mekkora az $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ és $\mathbf{b} = (0, -2, 1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

- 9
- 3 (X)
- 1,5
- 4,5

13. kérdés: Számítsa ki az ABC háromszög területét, ha $A(-3, 2, 5)$, $B(1, 0, 4)$ és $C(2, 6, 3)$!

- $\frac{\sqrt{749}}{2}$ (X)
- $\frac{37}{2}$
- $\frac{15}{2}$
- $\frac{\sqrt{740}}{2}$

14. kérdés: Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (5, -3, -2)$ és $\mathbf{c} = (3, -4, 2)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

- 3 (X)
- 3
- 9
- 5

15. kérdés: Egysíkúak-e az alábbi pontok: $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-1, -1, 1)$ és $D(-4, 1, 5)$?

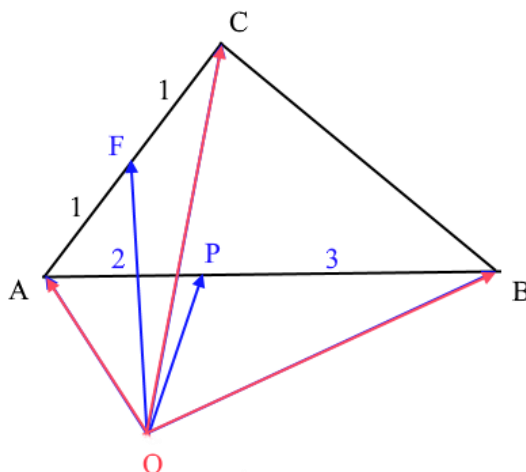
igen
nem (X)

Összetett feladatok

19. feladat: Adott az ABC háromszög $A(1,-1,2)$ csúcsa, valamint az AB oldal egy olyan $P(1,1,2)$ pontja, amelyre $AP:PB=2:3$. Az AC oldal felezőpontja $F(5,5,-2)$. Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcsait és a súlypont koordinátáit! Számítsuk ki a háromszög területét!

Megoldás

Jelölje $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$ és $\mathbf{s}$ rendre az A , B , C , P , F és S pontokba mutató helyvektorokat a szokásoknak megfelelően.



Mivel P egy ötödölő pont az AB szakaszon, ezért

$$\mathbf{p} = \frac{3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{5} \rightarrow \mathbf{b} = \frac{5\mathbf{p} - 3\mathbf{a}}{2} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a}.$$

Behelyettesítve:

$$\mathbf{b} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a} = \frac{5}{2}(1, 1, 2) - \frac{3}{2}(1, -1, 2) = (1, 4, 2).$$

Eszerint a háromszög B csúcsa:

$$B(1, 4, 2).$$

Mivel F felezőpont az AC oldalon, ezért:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} \rightarrow \mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a},$$

azaz:

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a} = 2(5, 5, -2) - (1, -1, 2) = (9, 11, -6).$$

Tehát a C csúcs koordinátái:

$$C(9, 11, -6).$$

Ismert összefüggés, hogy

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{3}[(1, -1, 2) + (1, 4, 2) + (9, 11, -6)] = \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Tehát a háromszög súlypontjának koordinátái:

$$S\left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

A háromszög területének meghatározásához adjunk meg két olyan vektort, amely kifeszíti a háromszöget. Legyenek ezek most az A pontból induló $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok. Ekkor a háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 5, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (8, 12, -8).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & -12 & -8 \end{vmatrix} = -40\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 40\mathbf{k}.$$

A háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-40)^2 + (-40)^2} = 20\sqrt{2}.$$

20. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai $A(-2, 1, 2)$, $B(4, 3, -1)$ és $C(1, 9, -3)$. Bizonyítsa be, hogy a paralelogramma négyzet!

Megoldás

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az AC és BD átlók felezőpontja megegyezik. Ez a pont a paralelogramma középpontja, jelöljük K -val.

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, és $\mathbf{k}$ rendre az A , B , C , D és K pontokba mutató helyvektorok.

Ekkor:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}[(-2, 1, 2) + (1, 9, -3)] = \left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right).$$

Továbbá:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{d} = 2\mathbf{k} - \mathbf{b} = 2\left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right) - (4, 3, -1) = (-5, 7, 0),$$

tehát a paralelogramma D csúcsa:

$$D(-5, 7, 0).$$

Egy paralelogramma akkor négyzet, ha két szomszédos oldala azonos hosszúságú és merőleges egymásra. Tekintsük az AB és AD oldalakat.

$$\overrightarrow{AB} = (6, 2, -3) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7$$

$$\overrightarrow{AD} = (3, -6, 2) \quad \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7$$

Tehát a paralelogrammánk két szomszédos oldala 7 egységnyi. Még a merőlegességet kell igazolni. Tudjuk, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk nulla. Ellenőrizzük le:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (6, 2, -3), (3, -6, 2) \rangle = 18 - 12 - 6 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy két szomszédos oldal merőleges egymásra.

Mivel olyan paralelogrammánk van, amelynek két szomszédos oldala egyenlő nagyságú és egymásra merőleges, ezért ez a paralelogramma négyzet.

Megjegyzés: A D csúcs meghatározása nélkül is dolgozhattunk volna. A négyzet olyan síkidom, amelynek két egyenlő hosszúságú átlója van, amelyek merőlegesen felezik egymást. Ezt a tulajdonságot kihasználva is megoldhattuk volna a feladatot.

21. feladat: Egy téglatest két élvektora $\mathbf{a} = (4, 3, 1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 0, 1)$. Határozzuk meg a harmadik $\mathbf{c}$ élvektorát, ha tudjuk, hogy $\|\mathbf{c}\| = 5$.

Megoldás

A téglatest élei merőlegesek egymásra, ezért a keresett $\mathbf{c}$ vektor merőleges mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektorra. Ha egy olyan vektort keresünk, amely két adott vektor mindegyikére merőleges, akkor ahhoz a vektoriális szorzatra lesz szükségünk. Képezzük az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Ez az új vektor csak akkor lehet a keresett $\mathbf{c}$ élvektor, ha a hossza 5 egység.

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{43}.$$

Nekünk egy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú, de 5 hosszúságú vektorra van szükségünk, ezért

$$\mathbf{c} = \frac{5}{\sqrt{43}}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{5}{\sqrt{43}}(3, -5, 3) = \left(\frac{15}{\sqrt{43}}, -\frac{25}{\sqrt{43}}, \frac{15}{\sqrt{43}}\right).$$

A feltételeknek a most meghatározott $\mathbf{c}$ vektor ellentettje is megfelel, így a feladat másik megoldása:

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{c} = \left(-\frac{15}{\sqrt{43}}, \frac{25}{\sqrt{43}}, -\frac{15}{\sqrt{43}}\right).$$

22. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder D csúcsból induló testmagasságának hossza, ha $A(1, 2, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(4, 4, 3)$ és $D(-5, 10, 9)$?

Megoldás

A megoldás során a tetraéder térfogatát kétféleképpen fogjuk felírni, amelyből a keresett magasság majd meghatározható lesz.

Határozzuk meg először a tetraéder A csúcsából induló élvektorait:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (3, 2, 2) \quad \overrightarrow{AD} = (-6, 8, 8).$$

Először számoljuk ki a tetraéder térfogatát a vegyszorzat segítségével.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2, 1, 2), (-6, 8, 8) \rangle = 36,$$

$$V_t = \frac{|\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

A D csúcsból induló testmagasság meghatározásához használjuk fel a tetraéder középiskolában tanult térfogatképletét, valamint azt, hogy a háromszög területét fel tudjuk írni a vektoriális szorzat hosszaként:

$$V_t = \frac{t_{ABC\Delta} \cdot m_D}{3} = \frac{\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \cdot m_D}{3} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \cdot m_D}{6}.$$

A vektoriális szorzatot már korábban kiszámoltuk, így:

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 3.$$

Innen a keresett magasság:

$$6 = \frac{3 \cdot m_D}{6} \rightarrow m_D = 12.$$

23. feladat: Határozzuk meg z értékét úgy, hogy az alábbi három vektor egy síkban legyen: $\mathbf{a} = (2, z, z)$, $\mathbf{b} = (-z, 3, -4)$, $\mathbf{c} = (2z, -1, 3)$.

Megoldás

Ha három vektor egy síkban van, akkor a vektorok szorzatuk nulla. Ezt használjuk ki a megoldás során.

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0.$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & z & z \\ -z & 3 & -4 \end{vmatrix} = -7z\mathbf{i} - (-8+z)\mathbf{j} + (6+z)\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= 0 \rightarrow \langle (-7z, 8-z, 6+z), (2z, -1, 3) \rangle = 0 \\ -14z^2 - (8-z) + 3(6+z) &= 0 \\ -14z^2 + 4z + 10 &= 0 \\ z_1 = 1 \quad z_2 &= -\frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Ellenőrző kérdések

16. kérdés: Adott az ABC háromszög $C(1, -3, 2)$ csúcsa, valamint az AC oldal egy olyan $P\left(\frac{5}{3}, -1, \frac{4}{3}\right)$ pontja, amelyre $AP:PC=1:2$. Az AB oldal felezőpontja $F\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

$$S(1, 0, 1)$$

$$S(1, -1, 0)$$

$$S(1, -1, 1) \quad (\text{X})$$

$$S(1, 1, -1)$$

17. kérdés: Kockát feszít-e ki a következő három vektor? $\mathbf{a}(-8, 2, 4)$, $\mathbf{b}(2, -4, 8)$, $\mathbf{c}(-4, 8, -2)$

igen

nem (X)

18. kérdés: Mekkora az $ABCD$ tetraéder D csúcsból induló testmagasságának hossza, ha $A(-1, -1, -1)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ és $D(0, 0, 3)$?

$$\frac{4}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{2}{6} \sqrt{3} \quad (\mathbf{X})$$

- 19. kérdés:** Határozza meg x értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 62 egység legyen, ha $\mathbf{a}(x, -6, 8)$, $\mathbf{b}(-x, -1, -4)$, $\mathbf{c}(x, -5, 3)$!

$$\frac{1}{3} \sqrt{2} \quad (\mathbf{X})$$

3. Vektorok, komplex számok

1.3. Térelemek megadása, metszéspontja, távolsága, szöge

Tanulási cél: ebben a leckében megmutatjuk, hogyan használhatjuk a skaláris és a vektoriális szorzatot térbeli egyenesek és síkok egyenletének felírására.

Térelemeknek nevezzük három dimenzióban a pontot, egyenest és síkot.

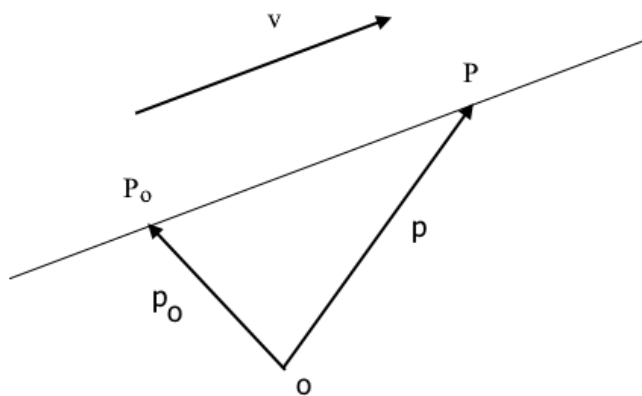
Egyenes megadása térben

Síkbeli koordináta geometriában az egyenes normálvektorának egy, az egyenesre merőleges vektort neveztünk. Térbeli egyenes esetében ez már nem egyértelmű, mert egy térbeli egyenesre végtelen sok merőleges vektor állítható, ezért a térbeli egyenes megadásához más adatra lesz szükségünk.

Legyen adott a térben egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan egyenes létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral. Ennek az egyenesnek a paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_0 rögzített pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ az egyenes egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, a t valós szám a paraméter, a $\mathbf{v}$ pedig az egyenes irányvektora.



Ez annyit jelent, hogy t helyére különböző értékeket helyettesítve az egyenesen egy-egy pontot kapunk. Ez fordítva is igaz, az egyenes minden pontjának egyértelműen megfelel egy t érték.

A fenti összefüggés egy vektoregyenlet, ami azt jelenti, hogy ha az egyenlet bal és a jobb oldala megegyezik, akkor a két vektor minden koordinátája megegyezik. Felírva a koordinátákra vonatkozó egyenleteket, az egyenes **paraméteres egyenletrendszerét** kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_1 t \\ y &= y_0 + v_2 t \\ z &= z_0 + v_3 t \end{aligned} \right\} t \in R.$$

Megjegyzés: Egy adott egyenes paraméteres egyenletrendszere végtelen sokféleképpen felírható!

Ha az egyenes irányvektorában egyik komponens sem nulla, akkor az egyenleteket t -re rendezve:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = (t)$$

az egyenes **paraméter nélküli** egyenletéhez jutunk.

1. feladat: Írja fel az $A(3, -1, 4)$ és $B(2, 3, -1)$ pontok által meghatározott egyenes egyenletét mindkét alakban! Adjon egy további C pontot, amely rajta van az egyenesen! Döntse el, hogy a $D(-3, 2, -1)$ pont rajta van-e az egyenesen?

Megoldás:

Az egyenes felírásához szükségünk van egy irányvektorra és egy adott pontra. Irányvektor lehet az $\overrightarrow{AB}$ vektor, az adott pont pedig legyen az A . Mivel $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v} = (-1, 4, -5)$, ezért az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 3 - t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 4 - 5t, \quad t \in R.$$

Mivel az irányvektor egyik komponense sem nulla, ezért mindegyik egyenletet t -re rendezve megkapjuk a paraméter nélküli alakot:

$$3 - x = \frac{y + 1}{4} = \frac{4 - z}{5}.$$

Az egyenes egy tetszőleges pontját kapjuk, ha t -nek adunk egy valós értéket és ezt behelyettesítjük az egyenes paraméteres egyenletrendszerébe, így meghatározva a keresett C pont (x, y, z) koordinátáit.

Legyen például $t = 2$, ekkor $x = 1, y = 7, z = -2$, tehát az egyenes egy tetszőleges C pontja: $C(1, 7, -2)$. Világos, hogy más t érték esetén az egyenes más-más pontját kapjuk.

Egy pont akkor van rajta egy egyenesen, ha koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. Ez a paraméteres alaknál azt jelenti, hogy minden koordináta értékhez ugyanaz a t érték tartozik. Ha $D(-3, 2, -1)$ rajta van az egyenesen, akkor D koordinátáit behelyettesítve és az egyenletrendszert megoldva mindegyik sorból azonos t -t számolunk.

$$-3 = 3 - t \rightarrow t = 6; \quad 4 = -1 + 4t \rightarrow t = \frac{5}{4}.$$

Mivel már az első két sorból különböző t értéket kaptunk, egyértelmű, hogy a D pont nincs rajta az egyenesen.

Megjegyzés: Ha az egyenes felírásánál a B pontot választottuk volna adott pontnak, akkor a következő alakot kapnánk:

$$x = 2 - t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = -1 - 5t, \quad t \in R.$$

Úgy tűnhet, hogy másik egyenest kaptunk, pedig nem. Ez ugyanaz az egyenes, csak más az alakja.

2. feladat: Igaz-e, hogy $e: x=1-2t, y=3+t, z=-1-t, t \in \mathbb{R}$ és $f: 1-x = \frac{y+3}{2} = \frac{2z+1}{3}$ egyenesek párhuzamosak?

Megoldás

Két egyenes párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. Az e egyenes irányvektora könnyen kiolvasható: $\mathbf{v}_e = (-2, 1, -1)$.

Az f egyenes paraméter nélküli egyenletét alakítsuk vissza a paraméteres formába, hogy az irányvektort ki tudjuk olvasni. Tudjuk, hogy

$$f: 1-x = \frac{y+3}{2} = \frac{2z+1}{3} = t,$$

innen:

$$\begin{aligned} 1-x &= t \rightarrow x = 1-t \\ \frac{y+3}{2} &= t \rightarrow y = -3+2t \\ \frac{2z+1}{3} &= t \rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t. \end{aligned}$$

Kiolvastva az f egyenes irányvektorát: $\mathbf{v}_f = (-1, 2, \frac{3}{2})$.

Ha két vektor párhuzamos, akkor megfelelő koordinátáik hányadosa állandó. Mivel

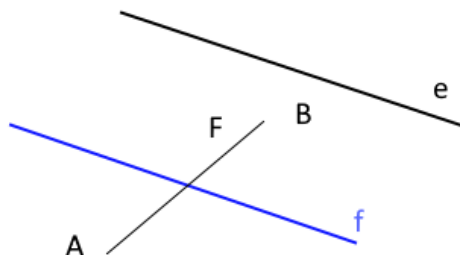
$$\frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{\frac{3}{2}}{-1},$$

ezért a két egyenes nem párhuzamos.

3. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőpontján átmenő, $e: \frac{x-1}{2} = \frac{2-2y}{3} = z-3$ egyenessel párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét, ha $A(2, -1, 0)$ és $B(0, -3, -2)$!

Megoldás

Készítsünk ábrát!



Legyen az általunk keresett egyenes f . Az egyenes felírásához kell egy irányvektora és egy pontja. Mivel az egyenes az AB szakasz felezőpontján megy át, ezért az lesz a rögzített pontunk. Legyen F az AB szakasz felezőpontja, ekkor annak koordinátái:

$$f_1 = \frac{2+0}{2} \rightarrow f_1 = 1$$

$$f_2 = \frac{-1+(-3)}{2} \rightarrow f_2 = -2$$

$$f_3 = \frac{0+(-2)}{2} \rightarrow f_3 = -1$$

Tehát $F(1, -2, -1)$.

Mivel $e \parallel f$, ezért az irányvektoraik párhuzamosak, tehát akár $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_f$ is lehet.

$\mathbf{v}_e$ meghatározásához alakítsuk át az egyenes egyenletét a paraméteres alakra:

$$\frac{x-1}{2} = t \rightarrow x = 1 + 2t$$

$$\frac{2-2y}{3} = t \rightarrow y = \frac{2-3t}{2}$$

$$z-3 = t \rightarrow z = 3 + t.$$

Az egyenletből: $\mathbf{v}_e = (2, -1, 5)$. Mivel $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_f$, ezért a keresett egyenes:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1,5} = z+1$$

4. feladat: Írja fel az $A(0, -4, 3)$ és $B(-3, -1, 0)$ végpontokkal rendelkező szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontján átmenő, XY síkra merőleges egyenes paraméteres egyenletét!

Megoldás

Először keressük meg az A -hoz közelebbi harmadoló H_A pontot. Mivel:

$$h_1 = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3)}{3} \rightarrow h_1 = -1$$

$$h_2 = \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{3} \rightarrow h_2 = -3$$

$$h_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{3} \rightarrow h_3 = 2$$

A számolt koordinátáknak megfelelően:

$$H_A(-1, -3, 2).$$

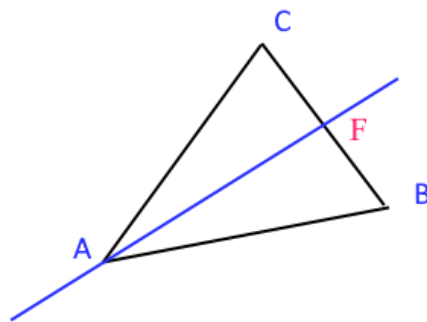
Az XY síkra merőleges egyenes párhuzamos a z tengellyel, ezért a z tengely irányába mutató bármely vektor jó lesz az általunk keresett egyenlet irányvektorának is. Mivel $\mathbf{v}_z = (0, 0, 1)$, ezért a keresett egyenes:

$$x = -1, \quad y = -3, \quad z = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. feladat: Írja fel az ABC háromszög A csúsból induló súlyvonalának egyenletét, ha $A(3, 1, -2)$, $B(-3, -1, 4)$ és $C(1, 5, -6)$.

Megoldás

Tudjuk, hogy a súlyvonal a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. Ha F a BC oldal felezőpontja, akkor egy olyan egyenest kell felírunk, amely áthalad az A és F pontokon.



A felezőpont könnyen számolható:

$$f_1 = \frac{-3+1}{2} \rightarrow f_1 = -1$$

$$f_2 = \frac{-1+5}{2} \rightarrow f_2 = 2$$

$$f_3 = \frac{4+(-6)}{2} \rightarrow f_3 = -1$$

tehát $F(-1, 2, -1)$.

A súlyvonal felírásához meghatározzuk egy irányvektorát: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AF} = (-4, 1, 1)$, adott pontnak pedig A -t választva a keresett egyenlet:

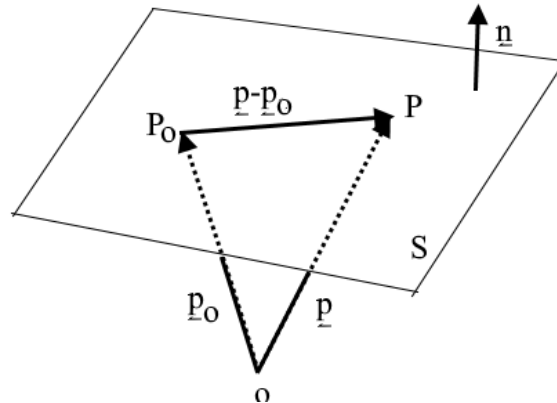
$$x = 3 - 4t, \quad y = 1 + t, \quad z = -2 + t \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sík megadása

Adott a térben egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \neq 0$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan sík létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra. Ekkor a sík normálegyenlete:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_0 pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ a sík egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, és $\mathbf{n}$ pedig a sík egy normálvektora (a síkra merőleges vektor).



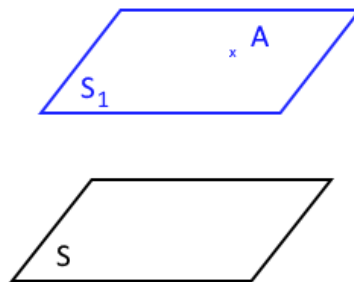
A skalárszorzat koordinátákkal felírt kiszámolási módját felhasználva megkapjuk a sík egyenletét:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

6. feladat: Írja fel az $A(2,1,-2)$ pontra illeszkedő és az $S: x - y + z = 2$ síkkal párhuzamos S_1 sík egyenletét! Adjon egy olyan B pontot, amely illeszkedik az S_1 síkra! Döntse el, hogy a $C(1, -3, 2)$ pont rajta van-e az S_1 síkon?

Megoldás

A feladathoz tartozó ábra:



Két sík párhuzamos, ha normálvektoraik megegyeznek vagy párhuzamosak. Olvassuk ki az adott sík egy normálvektorát: $\mathbf{n}_S = (1, -1, 1)$, ez lehet az általunk keresett S_1 sík normálvektora is. Mivel a sík tartalmazza az A pontot, az lesz a rögzített pont. Ekkor a keresett egyenlet:

$$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z + 2) = 0.$$

Rendezve:

$$S_1: x - y + z = 1.$$

Ha egy B pont rajta van a síkon, akkor a pont koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Mivel most ez egy tetszőleges pont lesz, ezért két koordinátáját tetszőlegesen megválasztjuk, a harmadik koordinátát pedig helyettesítéssel számoljuk.

Legyen $B(-2, 3, z)$. Ekkor

$$-2 + 1 \cdot 3 - 2z = 7 \rightarrow z = -3,$$

tehát $B(-2, 3, -3)$.

Ha $C(1, -3, 2)$ rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Ezt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Mivel

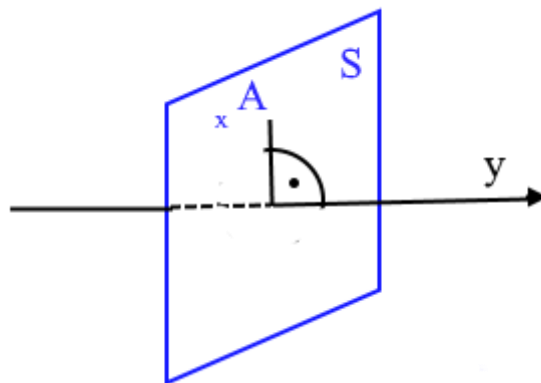
$$1 - 3 - 4 \neq 7,$$

ezért C nincs rajta az S_1 síkon.

7. feladat: Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az y tengelyre és áthalad az $A(1, -2, 3)$ ponton!

Megoldás

Készítsünk egy kész ábrát!



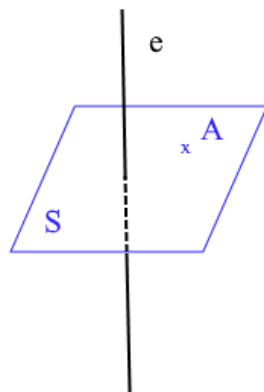
Az y tengely merőleges a keresett síkra, ezért $\mathbf{n}_S = \mathbf{v}_y$ teljesül. Mivel $\mathbf{v}_y = (0, 1, 0)$, így a keresett sík:

$$S: 0(x-1) + 1(y+2) + 0(z-3) = 0 \rightarrow y = -2.$$

8. feladat: Írja fel az $e: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} = 1-z$ egyenesre merőleges és az $A(1, -2, 3)$ ponton átmenő sík egyenletét!

Megoldás

Rajzoljunk egy kész ábrát!



Az előző feladat alapján tudjuk, hogy $\mathbf{n}_s = \mathbf{v}_e$. Az egyenes irányvektorának meghatározásához vissza kell alakítani paraméteres alakba.

$$\frac{x-1}{3} = t \rightarrow x = 1 + 3t,$$

$$\frac{2-y}{2} = t \rightarrow y = 2 - 2t,$$

$$1 - z = t \rightarrow z = 1 - t.$$

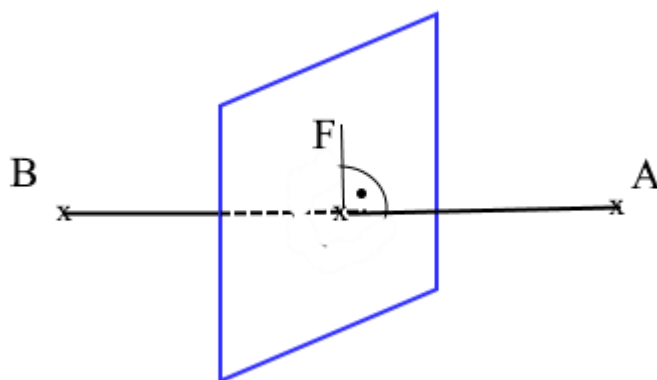
Innen $\mathbf{v}_e = (3, -2, -1)$. Mivel $\mathbf{n}_s = \mathbf{v}_e$, így a keresett sík egyenlete:

$$S: 3(x-1) - 2(y+2) + 1(z-3) = 0 \rightarrow 3x - 2y + z = 10.$$

9. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét, ha $A(1, 2, -3)$ és $B(-3, 4, 1)$.

Megoldás

Rajzoljunk!



Először meghatározzuk a szakasz felezőpontját: $F\left(\frac{1-3}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (-1, 3, -2)$.

Mivel a felezőmerőleges egyenese merőleges a síkra, ezért $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_s$.

Tudjuk, hogy $\mathbf{v}_f = \overrightarrow{AB} = \mathbf{n}_s = (-4, 2, 4)$, így a keresett sík egyenlete:

$$-4(x+1) + 2(y-3) + 4(z+1) = 0,$$

átrendezve:

$$-4x + 2y + 4z = 6 \rightarrow 2x - y + 2z = 3.$$

Ellenőrző kérdések

1. **kérdés:** Írja fel az $A(-3, 4, 5)$ pontot az origóval összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

$$x = -3t, \quad y = -4t, \quad z = -5t \quad t \in R$$

$$x = 3t, \quad y = -4t, \quad z = -5t \quad t \in R \quad (\mathbf{X})$$

$$x = 3t, \quad y = 4t, \quad z = -5t \quad t \in R$$

$$x = -3t, \quad y = -4t, \quad z = 5t \quad t \in R$$

2. **kérdés:** Írja fel az $A(2, 0, 4)$ és $B(-4, 2, -2)$ pontok felezőpontján áthaladó, $e: x = 2 - t, y = 3 + 2t, z = 2 + t$ egyenessel párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét!

$$x + 2 = \frac{y - 1}{2} = z - 1$$

$$-x - 2 = \frac{y - 1}{2} = z + 1$$

$$x + 2 = \frac{1 - y}{2} = z - 1$$

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = z - 1 \quad (\mathbf{X})$$

3. **kérdés:** Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(-3, 0, 1)$ ponton és párhuzamos az y tengellyel!

$$x = 3, \quad y = t, \quad z = 1 \quad t \in R$$

$$x = -3 + t, \quad y = t, \quad z = -1 \quad t \in R$$

$$x = -3, \quad y = t, \quad z = 1 \quad t \in R \quad (\mathbf{X})$$

$$x = -3, \quad y = t, \quad z = t \quad t \in R$$

4. **kérdés:** Írja fel az $A(2, -2, 1)$ ponton áthaladó $2x + y - z = 1$ síkra merőleges egyenes egyenletét!

$$x = 2 + 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 - t \quad t \in R \quad (\mathbf{X})$$

$$x = 2 - 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 - t \quad t \in R$$

$$x = 2 - 2t, \quad y = -2 - t, \quad z = 1 - t \quad t \in R$$

$$x = 2 + 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 + t \quad t \in R$$

5. **kérdés:** Döntse el, hogy az $A(1, -3, 2)$ és a $B(-1, 1, 2)$ pontok rajta vannak-e a $2x + y - z = 1$ síkon?

mindkettő rajta van

csak A van rajta

csak B van rajta

egyik sincs rajta (X)

6. Írja fel az $A(1, 5, -2)$ pontra illeszkedő és az YZ síkkal párhuzamos sík egyenletét!

$$x = 1 \quad (\mathbf{X})$$

$$y = 5$$

$$z = 2$$

$$x = 0$$

7. **kérdés:** Írja fel az $A(1, 0, -1)$ pontra illeszkedő és az $e: \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{2z-1}{4}$ egyenesre merőleges sík egyenletét!

$$2x + 3y + 2z = 0$$

$$2x - 3y + 2z = 0 \quad (\mathbf{X})$$

$$2x - 3y - 2z = 0$$

$$2x + 3y - 2z = 0$$

Tételek kölcsönös helyzete, közös pontjai

Két egyenes metszéspontja

Mivel közös pontot keresünk, ezért két ismeretlenes, de három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. Ezt úgy érdemes megtenni, hogy tetszőlegesen kiválasztunk két egyenletet, azokat megoldjuk, majd leellenőrizzük, hogy a kapott megoldás kielégíti-e a harmadik egyenletet. Ha igen, akkor van megoldás, azaz a két egyenes metszi egymást, ha nem, akkor nincs megoldás, azaz a két egyenes nem metszi egymást. Ezeket ilyenkor kitérő egyeneseknek nevezzük.

10. feladat: Határozzuk meg az $e: x = 2 + t, y = -1 - t, z = 1 - 2t \quad t \in \mathbb{R}$ és az $f: x = 4 + t, y = 1 + 3t, z = t \quad t \in \mathbb{R}$ egyenesek metszéspontját, ha létezik!

Megoldás

Az egyenesek irányvektorai: $\mathbf{v}_e = (1, -1, -2)$ és $\mathbf{v}_f = (1, 3, 1)$. Mivel a két irányvektor nem párhuzamos egymással, ezért a két egyenes sem az, tehát vagy metszik egymást vagy kitérők. Próbáljunk metszéspontot keresni. Ebben az esetben célszerű a két egyenes egyenletében szereplő paramétert más-más betűvel jelölni, ezért az f egyenes paraméterét a továbbiakban u -val jelöljük. Ha a két egyenesnek van metszéspontja, akkor az azt jelenti, hogy van olyan t és u paraméter, amelyek ugyanazt az $M(x, y, z)$ pontot határozzák meg. Ez azt jelenti, hogy ennek a két paraméternek ki kell elégítenie a következő egyenletrendszert:

$$2 + t = 4 + u \quad -1 - t = 1 + 3u \quad 1 - 2t = u.$$

A harmadik egyenletből megvan u , ezt beírva az első egyenletbe:

$$2 + t = 4 + 1 - 2t \rightarrow t = 1 \rightarrow u = -1$$

Ha van metszéspont, akkor ezeknek az értékeknek ki kell elégíteniük az eddig általunk fel nem használt második egyenletet is. Ha ez nem teljesül, akkor a két egyenesnek nincs metszéspontja. Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$-1 - 1 = 1 + 3 \cdot (-1)$$

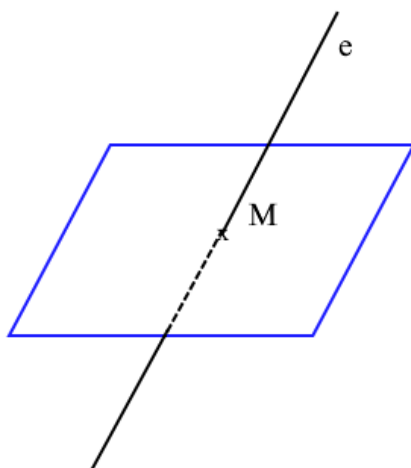
Az egyenlőség teljesül, tehát van metszéspont. Ez a metszéspont meghatározható a t paraméterrel az e egyenesből, vagy az u paraméterrel az f egyenesből is.

Ha a $t = 1$ értéket behelyettesítjük az e egyenesbe, akkor a metszéspont: $M(3, -2, -1)$

Egyenes és sík metszéspontja

11. feladat: Határozzuk meg az $e: x = 2 + t, y = -2 + t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes és az $S: x - 2y + 5z = 20$ sík metszéspontját!

Megoldás



Keressük azt az egyenesen lévő $M(2+t, -2+t, 3t)$ pontot, amely rajta van az S síkon is. Ha egy pont rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Helyettesítsük be a pont koordinátáit a sík egyenletébe:

$$(2+t) - 2(-2+t) + 5(3t) = 20 \rightarrow 14t = 14 \rightarrow t = 1.$$

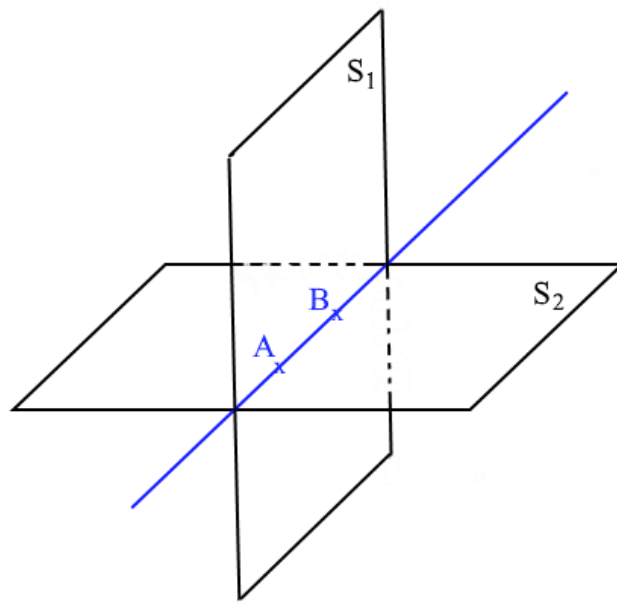
Ez azt jelenti tehát, hogy az egyenes $t = 1$ paraméterértékhez tartozó pontja rajta van az S síkon, vagyis a metszéspont $M(3, -1, 3)$

Két sík metszészvonala

12. feladat: Határozzuk meg az $S_1: x + y - z = 1$ és $S_2: x - y + 2z = 2$ síkok metszészvonalának egyenletét!

Megoldás

Olvassuk ki a síkok normálvektorait: $\mathbf{n}_{S_1} = (1, 1, -1)$ és $\mathbf{n}_{S_2} = (1, -1, 2)$. Látható, hogy a két normálvektor nem egymás skalárszorosa, azaz a síkok nem párhuzamosak.



Ez pedig azt jelenti, hogy egy egyenesben metszik egymást. A metszésvonal meghatározásának az a legegyszerűbb módja, ha keresünk két olyan pontot, amely a metszésvonalon rajta van. Ez egyben azt is jelenti, hogy ez a két pont mindkét síkon is rajta van. Azaz kell két olyan (x,y,z) hármas, amely mindkét sík egyenletét kielégíti. Ekkor a metszésvonal a két ponton átmenő egyenes lesz, ami így már könnyen felírható.

Tekintsük a síkok egyenleteiből álló egyenletrendszert:

$$x + y - z = 1 \quad x - y + 2z = 2$$

Ennek végtelen sok megoldása van. Ezért lehetőségünk van olyan pontokat keresni, amelyek valamelyik koordinátáját mi magunk választjuk meg tetszőleges értékkel. Célszerű egy $A(x, y, 0)$ és egy $B(0, y, z)$ pontot keresni.

Az A pont meghatározása során az egyenletekbe a z helyére nullát írva, megoldjuk az így kapott egyenletrendszert.

$$x + y = 1 \quad x - y = 2 \rightarrow x = 1,5 \quad y = -0,5 \rightarrow A(1,5, -0,5, 0).$$

Hasonlóan keressük meg a B pontot is:

$$y - z = 1 \quad -y + 2z = 2 \rightarrow z = 3 \quad y = 4 \rightarrow B(0, 4, 3)$$

A keresett egyenes két pontjából meghatározzuk az egyenes irányvektorát: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (-1, 5, 4, 5, 3) = (-3, 9, 6)$, majd a B pont segítségével felírjuk a metszésvonal egyenletét.

$$S_1 \cap S_2 = \begin{cases} x = -3t \\ y = 4 + 9t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ellenőrző kérdések

8. kérdés: Határozza meg az $e: x = 3 + 2t, y = 1 + t, z = 2 - t \quad t \in R$ és $f: x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 1 - 2t \quad t \in R$ egyenesek metszéspontját!

Megoldás

$$M(-3, -2, -5)$$

$$M(5, 2, 1)$$

$$M(-3, -2, 5) \text{ (X)}$$

$$M(1, 6, -3)$$

9. kérdés: Határozza meg az $e: x = 3 - 3t, y = -1 + t, z = -2 - 2t \quad t \in R$ egyenes és az YZ sík metszéspontját!

Megoldás

$$M(0, -2, 0)$$

$$M(1, 0, 0)$$

$$M(0, -2, 3)$$

$$M(0, 0, -4) \text{ (X)}$$

10. kérdés: Határozzuk meg az $e: x = 2 - t, y = 1 + t, z = 1 - 2t \quad t \in R$ egyenes és az $S: x + y - 2z - 5 = 0$ sík metszéspontját!

Megoldás

$$M(1, 2, -1) \text{ (X)}$$

$$M(0, 3, -3)$$

$$M(2, 1, -1)$$

$$M(0, 5, 0)$$

11. kérdés: Legyen $S_1: x - y + 2z = 6$ és $S_2: 2x - y - z = 3$ két egymást metsző sík. Döntsük el, hogy az $A(-6, -14, -1)$ és $B(-3, 9, 1)$ pontok közül melyik van rajta a két sík metszésvonalán?

Megoldás

mindkettő rajta van

csak A van rajta (X)

csak B van rajta

egyik sincs rajta

Tételek távolsága, hajlásszöge

Két pont távolsága

Definíció: Két pont távolságán az őket összekötő szakasz (vektor) hosszát értjük.

Tétel: Legyenek $A(a_1, a_2, a_3)$ és $B(b_1, b_2, b_3)$ adott pontok. Ekkor a két pont távolsága:

$$d_{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Pont és egyenes távolsága

Definíció: Egy pont és egy, a pontra nem illeszkedő egyenes távolságán a pontból az egyenesre bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyen adott egy P pont és egy $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{Pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

ahol P_0 az e egyenes egy tetszőleges pontja.

Pont és sík távolsága

Definíció: Pont és a pontra nem illeszkedő sík távolságán a pontból a síkra bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyen adott egy P pont és egy $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{PS} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$$

ahol P_0 az S sík egy tetszőleges pontja.

13. feladat: Határozzuk meg az $A(2, -1, 5)$, $B(3, 2, 1)$ és $C(6, 4, 3)$ csúcspontú háromszög területét!

Megoldás

A háromszög kerülete az oldalai hosszának összegével egyenlő, azaz a csúcspontok egymástól mért távolságainak összegével.

Írjuk fel a vektorokat és számoljuk ki a hosszukat:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, -4) \quad d(AB) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, 5, -2) \quad d(AC) = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, 2, 2) \quad d(BC) = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{17}$$

A háromszög kerülete: $K = \sqrt{26} + \sqrt{45} + \sqrt{17} \approx 15,93$

14. feladat: Határozza meg a $P(3, 2, -1)$ pont és az $e: x=1+t, y=-1-2t, z=-2 \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes távolságát!

Megoldás

A távolság meghatározásához szükségünk van egy pontra az egyenesről. Legyen ez $P_0(1, -1, -2)$, továbbá kell az egyenes irányvektor: $\mathbf{v} = (1, -2, 0)$. Ha $P(3, 2, -1)$, akkor

$$\overrightarrow{P_0P} = (2, 3, 1).$$

$$\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

A kapott vektor hossza:

$$\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{54}$$

Az irányvektor hossza:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

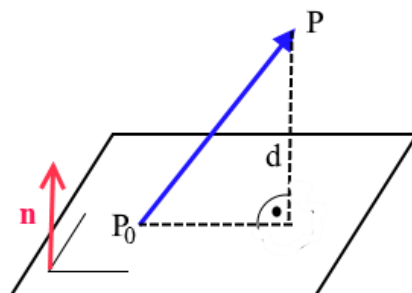
A keresett távolság:

$$d_{pe} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}} \approx 3,29.$$

15. feladat: Határozza meg a $P(1, -2, -1)$ pont és az $S: 2x - 4y + z = 2$ sík távolságát!

Megoldás

A megoldáshoz szükségünk lesz a sík egy tetszőleges pontjára és a normálvektorra. Mivel egy olyan tetszőleges pontot keresünk, amely rajta van a síkon, ezért a pont két koordinátáját szabadon megválaszthatjuk, míg a harmadik koordinátát a sík egyenletébe való helyettesítéssel számoljuk. Keressük a $P_0(0, 0, z)$ síkbeli pontot. Könnyen számolható, hogy ekkor $z = 2$, tehát $P_0(0, 0, 2)$.



Ekkor:

$$\overrightarrow{P_0P} = (-1, 2, 3).$$

Olvassuk ki a sík egy normálvektorát és számoljuk ki a vektor hosszát:

$$\mathbf{n} = (2, -4, 1) \quad \|\mathbf{n}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$

Behelyettesítve a távolságot megadó képletbe:

$$d_{PS} = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \left| \frac{-2 - 8 + 3}{\sqrt{21}} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{21}} \right| = \frac{7}{\sqrt{21}} \approx 1,53.$$

Megjegyzés:

Két párhuzamos egyenes távolsága visszavezethető pont és egyenes távolságára. Ugyanis ilyenkor az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől mért távolságát kell meghatároznunk.

Két párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Egy egyenes és egy vele párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Tételek hajlásszöge

Tételek hajlásszöge minden esetben legfeljebb 90° lehet. Ezt a szöget α -val fogjuk jelölni.

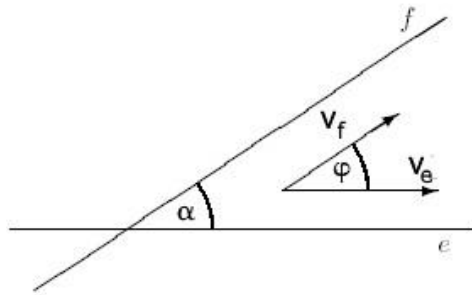
Két egyenes hajlásszöge

Definíció: Két metsző egyenes hajlásszöge megegyezik az egyenesek által közbezárt kisebbik szöggel. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor párhuzamos eltolással metsző helyzetbe hozhatók.

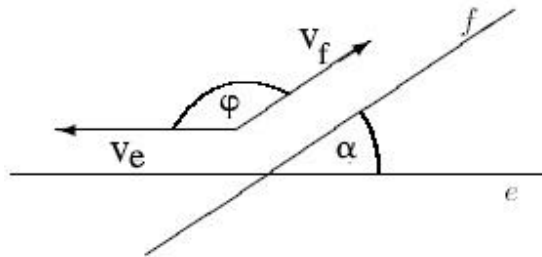
Ez a hajlásszög meghatározható a két egyenes irányvektorából. Jelöljük az e és f egyenesek egy-egy irányvektorát $\mathbf{v}_e$ és $\mathbf{v}_f$ -fel. Ekkor az irányvektorok által bezárt szög skaláris szorzat felhasználásával a következő összefüggésből számolható:

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_f \rangle|}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{v}_f\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = 180^\circ - \varphi$ a két egyenes hajlásszöge.



16. feladat: Határozza meg az $e: x = 3 - 2t, y = 1 + t, z = 4 - 5t \quad t \in R$ és az $f: x - 1 = \frac{z - 1}{3}, y = 5$ egyenesek hajlásszögét!

Megoldás

Első lépésként meg kell adni mindkét egyenes egy-egy irányvektorát és azok hosszát:

$$\mathbf{v}_e = (-2, 1, -5) \quad \|\mathbf{v}_e\| = \sqrt{30}$$

$$\mathbf{v}_f = (1, 0, 3) \quad \|\mathbf{v}_f\| = \sqrt{10}.$$

Ekkor a keresett szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_f \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{v}_f\|} = \frac{-17}{\sqrt{300}} \approx -0,98 \rightarrow \varphi \approx 168,52^\circ.$$

Mivel ez tompaszög, ezért a keresett hajlásszög:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 168,52^\circ \approx 11,48^\circ.$$

17. feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét, ha $A(2, 3, -1)$, $B(5, 4, 3)$, $C(2, -1, 6)$ és $D(-1, -3, 2)$.

Megoldás

A két átló egyenes irányvektorának szögét határozzuk meg először. Az egyik egyenes irányvektora az $\overrightarrow{AC}$, a másiké pedig a $\overrightarrow{BD}$ vektor is lehet. Adjuk meg ezen vektorok koordinátáit:

$$\overrightarrow{AC} = (0, -5, 7) \quad \overrightarrow{BD} = (-6, -7, -1).$$

Számoljuk ki a vektorok által bezárt szögét:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{BD}\|} = \frac{28}{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + 7^2} \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + (-1)^2}} = \\ &= \frac{28}{\sqrt{74} \sqrt{86}} \approx 0,3510 \rightarrow \varphi \approx 69,45^\circ.\end{aligned}$$

Mivel $\varphi < 90^\circ$, ezért a keresett hajlásszög $\alpha = 69,45^\circ$.

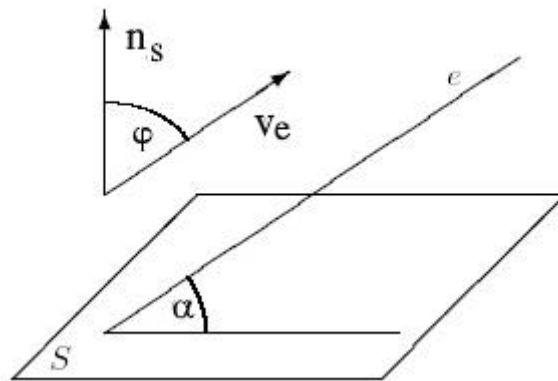
Egyenes és sík hajlásszöge

Definíció: Egyenes és sík hajlásszögén az egyenes és az egyenes síkra eső merőleges vetületének hajlásszögét értjük.

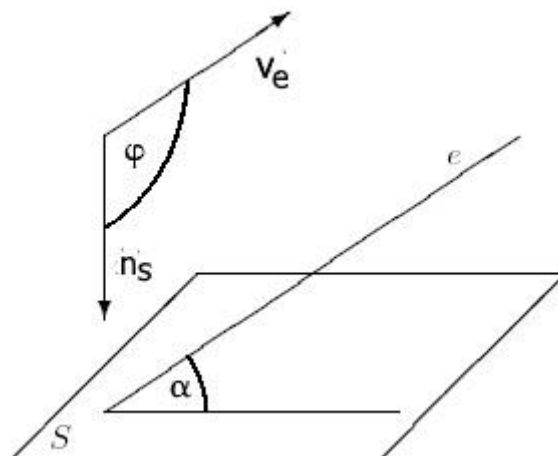
Ha ismerjük a sík egy $\mathbf{n}_s$ normálvektorát és az egyenes egy $\mathbf{v}_e$ irányvektorát, akkor a két vektor által bezárt szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{n}_s \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{n}_s\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = 90^\circ - \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = \varphi - 90^\circ$ hajlásszög.



18. feladat: Határozza meg az y tengely és az $S : 2x + z = 2 + 4y$ sík hajlásszögét!

Megoldás

A számoláshoz ismernünk kell az egyenes egy irányvektorát és a sík egy normálvektorát, valamint ezen vektorok hosszát.

$$\mathbf{v}_e = (0, 1, 0) \quad \|\mathbf{v}_e\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\mathbf{n}_s = (2, -4, 1) \quad \|\mathbf{n}_s\| = \sqrt{21}.$$

A keresett szög:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{v}_e, \mathbf{n}_s \rangle}{\|\mathbf{v}_e\| \|\mathbf{n}_s\|} = \frac{-4}{\sqrt{21}} \approx -0,87 \rightarrow 150,46^\circ$$

Ez alapján az egyenes és sík hajlásszöge:

$$\alpha = \varphi - 90^\circ \approx 150,46^\circ - 90^\circ \approx 60,46^\circ.$$

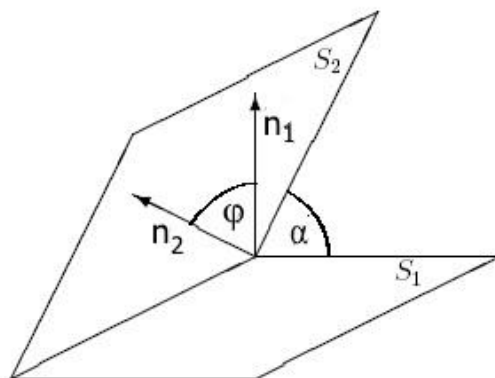
Két sík hajlásszöge

Definíció: Két sík hajlásszöge normálvektoraik hajlásszöge, ha az hegyesszög. Tompaszög esetén 180° -ból azt kivonva kapjuk a síkok szögét.

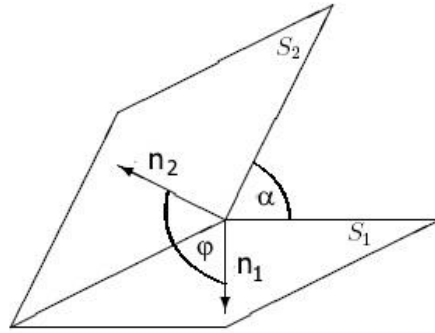
Ha ismerjük a két sík $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ normálvektorát, akkor

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$

Ha $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, akkor $\alpha = \varphi$ a hajlásszög.



Ha $90^\circ < \varphi$, akkor $\alpha = 180^\circ - \varphi$ a két sík hajlásszöge.



19. feladat: Határozza meg az $S_1 : x + y - z = 1$ és $S_2 : x - 2y + z = 0$ síkok hajlásszögét!

Megoldás

Kiolvasva a síkok egy-egy normálvektorát és meghatározva azok hosszát:

$$\mathbf{n}_{S_1} = (1, 1, -1) \quad \|\mathbf{n}_{S_1}\| = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{n}_{S_2} = (1, -2, 1) \quad \|\mathbf{n}_{S_2}\| = \sqrt{6}.$$

Majd ezekkel az adatokkal számolva:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_{S_1}, \mathbf{n}_{S_2} \rangle}{\|\mathbf{n}_{S_1}\| \|\mathbf{n}_{S_2}\|} = \frac{-2}{\sqrt{18}} \quad \varphi \approx 118,12^\circ.$$

Innen az általunk keresett hajlásszög:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 118,12^\circ \approx 61,88^\circ.$$

Ellenőrző kérdések

12. kérdés: Határozza meg az $A(2, 3, -1)$ pont és az $e : x = 3 - 2t, y = -2 + t, z = 5 \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes távolságát!

Megoldás

7,22 (X)

5,22

9,72

6,75

13. kérdés: Határozza meg az origó és az $S : x + y + z = 0$ sík távolságát!

Megoldás

$\sqrt{2}$

2

0 (X)

1

14. kérdés: Határozza meg az $e: \frac{2-x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{2+z}{-2}$ egyenes és az $S: x-2y+z=5$ sík hajlásszögét!

Megoldás

70,22°

80,24° (X)

55,12°

62,22°

15. kérdés Határozza meg az $e: x=t, y=1-t, z=1+t \ t \in R$ egyenes és az y tengely hajlásszögét!

Megoldás

35,26°

25,26°

44,74°

54,74° (X)

16. kérdés: Határozza meg az $S: x-3y+z=1$ és az yz sík hajlásszögét!

Megoldás

52,45°

37,21°

72,45° (X)

82,28°

Összetett feladatok

20. feladat: Írja fel az $A(1,3,-2)$ ponton áthaladó, az e és f egyenesekre merőleges g egyenes egyenletét, ha

$$e: x = y = z \quad f: -x = z, y = 3.$$

Adja meg a g egyenes és az xy sík metszéspontját!

Megoldás

Az egyenes egyenletrendszerének felírásához szükségünk van egy pontra és egy irányvektorra. Egy pontja adott a keresett egyenesnek. Nézzük meg, hogy mit tudunk mondani a keresett egyenes egy irányvektoráról. Jelölje $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_f$ és $\mathbf{v}_g$ az e , f és g egyenesek irányvektorait. Ha a keresett g egyenes merőleges e és f egyenesekre, akkor $\mathbf{v}_g \perp \mathbf{v}_e$ és $\mathbf{v}_g \perp \mathbf{v}_f$ is teljesül. Tehát egy olyan vektort keresünk, amelyik merőleges a két ismert vektorra. A $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f$ éppen megfelel a feltételeknek, mivel az merőleges a $\mathbf{v}_e$ és a $\mathbf{v}_f$ vektorokra is, azaz legyen $\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f$.

Kiolvassuk az egyenesek irányvektorait:

$$\mathbf{v}_e = (1,1,1) \quad \mathbf{v}_f = (-1,0,1).$$

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Eszerint a g egyenes egyenlete:

$$g: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z+2.$$

Meg kell határoznunk a most felírt egyenes és az xy sík metszéspontját. Ehhez írjuk fel a g egyenes egyenletét paraméteres alakban. Ehhez a következőből kell elindulni:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z+2 = t,$$

majd változónként külön-külön rendezéssel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{x-1}{1} = t \rightarrow x = 1+t$$

$$\frac{y-3}{-2} = t \rightarrow y = 3-2t$$

$$z+2 = t \rightarrow z = -2+t.$$

Mi az egyenesnek azt az M pontját keressük, amelyik rajta van az xy síkon. Az ilyen pont koordinátái általánosan: $M(x, y, 0)$. Mivel a harmadik koordináta 0 , ezt behelyettesítve az egyenes egyenletrendszerébe:

$$z = -2+t \quad 0 = -2+t \quad t = 2.$$

A kapott t értéket visszahelyettesítve számoljuk a pont hiányzó koordinátáit:

$$x = 1 + t \quad x = 1 + 2 = 3$$

$$y = 3 - 2t \quad y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Tehát a keresett metszéspont:

$$M(3, -1, 0).$$

21. feladat: Adottak az $A(3, -1, 2)$, $B(4, 1, 1)$ és $C(7, -2, 5)$ pontok.

- Írjuk fel az ABC háromszög S súlypontján átmenő, a háromszög síkjára merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
- Írjuk fel a háromszög síkjának egyenletét!
- Adja meg a háromszög B csúcsából induló magasságának hosszát!

Megoldás

- a) Mivel az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor is a három pontra illeszkedő síkban van, ezért vektoriális szorzatuk merőleges lesz a síkra. Mivel az általunk keresett egyenes is merőleges a síkra, ezért a keresett egyenes egy irányvektora legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Végezzük el a számolást:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (4, -1, 3)$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -7, -9).$$

Meg kell még határoznunk a háromszög súlypontjának koordinátáit:

$$s_1 = \frac{3+4+7}{3} \quad s_1 = \frac{14}{3}$$

$$s_2 = \frac{-1+1+(-2)}{3} \quad s_2 = -\frac{2}{3}$$

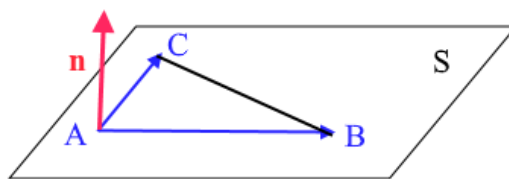
$$s_3 = \frac{2+1+5}{3} \quad s_3 = \frac{8}{3}$$

$$S\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

A keresett egyenes:

$$e: x = \frac{14}{3} + 5t, \quad y = -\frac{2}{3} - 7t, \quad z = \frac{8}{3} - 9t \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b) A háromszög síkjának felírásához szükséges a sík egy normálvektora és egy ismert pontja.



A normálvektor merőleges a síkra, így kihasználva az előző feladatrészen kapott eredményt:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9).$$

A sík egyenletét az $\mathbf{n}$ normálvektor és az A pont segítségével írjuk fel:

$$5(x-3) - 7(y+1) - 9(z-2) = 0$$

Átrendezve:

$$5x - 7y - 9z = 4.$$

- c) A B csúsból induló magasságának hossza nem más, mint a B csúsból az AC oldalra bocsátott merőleges szakasz hossza. Másképpen fogalmazva, a B csúcs és az AC oldalegyenes távolsága. Ezt viszont a következőképpen lehet számolni:

$$d_{B,AC} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Kihasználva az első részben kapott eredményeket:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9) \quad \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-7)^2 + (-9)^2} = \sqrt{155}$$

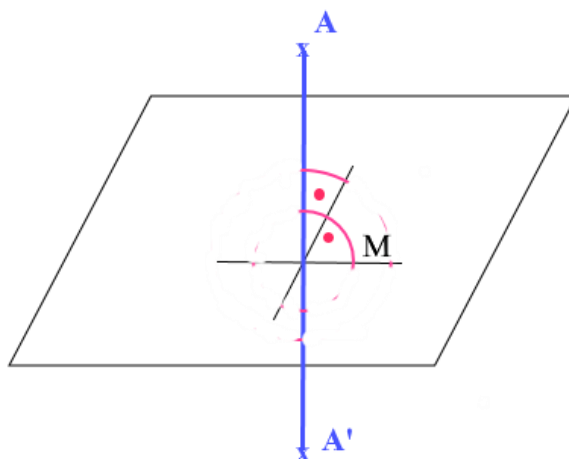
$$\overrightarrow{AC} = (4, -1, 3) \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

Tehát a keresett magasság hossza: $\frac{\sqrt{155}}{\sqrt{26}} \approx 2,44$.

22. feladat: Tükrözzük az $A(-2,1,-1)$ pontot az $S: x + y + z = 1$ egyenletű síkra!

Megoldás

Egy pontot egy síkra úgy tükrözzük, hogy először a pontból merőlegest állítunk a síkra, megkeressük a merőleges egyenes és a sík M metszéspontját, majd kihasználjuk, hogy ez a metszéspont felezőpontja az eredeti pont és a tükörkép alkotta szakasznak.



Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a sík egy normálvektora lehet az egyenes egy irányvektora. Hívjuk ezt az egyenest e egyenesnek, ekkor

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{n}_s = (1, 1, 1)$$

Felírhatjuk a síkra merőleges, az A ponton átmenő e egyenes egyenletét:

$$e: x = -2 + t, y = 1 + t, z = -1 + t \quad t \in \mathbb{R}$$

Az M metszéspont meghatározásához helyettesítsük be az e egyenes egyenletét az S sík egyenletébe:

$$-2 + t + 1 + t - 1 + t = 1 \rightarrow -2 + 3t = 1 \rightarrow t = 1$$

azaz

$$M(-1, 2, 0).$$

Kihasználva, hogy M felezőpont és a tükörkép pontot $A'(x, y, z)$ módon jelölve, a felezőpontra vonatkozó összefüggés alapján:

$$-1 = \frac{-2 + x}{2} \rightarrow x = 0$$

$$2 = \frac{1 + y}{2} \rightarrow y = 3$$

$$0 = \frac{-1 + z}{2} \rightarrow z = 1$$

A keresett tükörkép:

$$A'(0, 3, 1).$$

23. feladat: Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2, 3, 5)$ ponton és illeszkedik az y tengelyre!

Megoldás

A sík megadásához szükségünk van egy pontra és egy normálvektorra. A pont adott, a normálvektort kell meghatároznunk. Ha a sík illeszkedik egy egyenesre, akkor a sík egy normálvektora merőleges lesz az egyenesre, és így az egyenes egy irányvektorára is. Tehát olyan $\mathbf{n}$ normálvektort keresünk, amely merőleges az y tengely $\mathbf{v}_y = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ irányvektorára.

Másrészt, ha megadnánk egy Q pontot az y tengelyen, akkor a $\overrightarrow{QP}$ vektor illeszkedik a síkra, tehát merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra. Adjunk meg egy pontot az y tengelyről! A legegyszerűbb

az origó, azaz $Q(0,0,0)$. Ekkor $\overrightarrow{QP} = (2,3,5)$. Tehát keresünk egy $\overrightarrow{QP}$ és $\mathbf{v}_y$ vektorokra merőleges vektort. A feltételnek megfelel a vektoriális szorzata. Ezért legyen

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{QP} \times \mathbf{v}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-5, 0, 2).$$

Az S sík egyenlete:

$$S: -5(x-2) + 0(y-3) + 2(z-5) = 0.$$

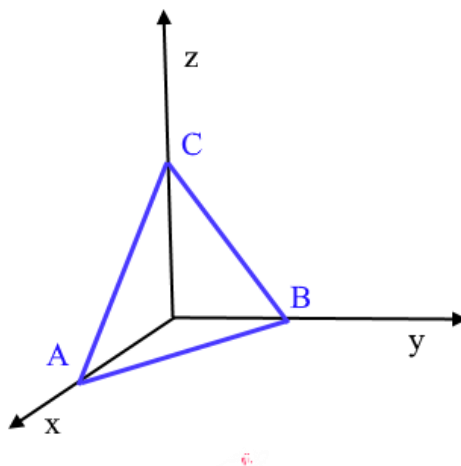
Rendezéssel a következő egyenlethez jutunk:

$$-5x + 2z = 0.$$

24. feladat: Mekkora területű háromszöget metszenek ki a koordinátasíkok az $S: 2x - y + 3z = 6$ egyenletű síkból?

Megoldás

Határozzuk meg először a kimetszett háromszög csúcspontjainak koordinátáit.



Az x tengelyre eső A csúcsponttól tudjuk, hogy a második és harmadik koordinátája 0 , azaz $y = z = 0$. A sík egyenlete alapján, akkor $x = 3$.

Az y tengelyen lévő B csúcspontnál $x = z = 0$, behelyettesítve a sík egyenletébe: $y = -6$.

A z tengelyen lévő C csúcspont koordinátái, ha $x = y = 0$, akkor $z = 2$.

Tehát a csúcspontok:

$$A(3,0,0) \quad B(0,-6,0) \quad C(0,0,2).$$

Válasszuk ki az egyik pontot, például A -t. Indítsunk vektorokat A -ból a háromszög másik két csúcsába. A megadott két vektor kifeszíti a háromszöget és területe pedig

$$t = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Végezzük el a számolást!

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -6, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-12, 6, -18)$$

$$t = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 36 + 324} = \sqrt{126}.$$

25. feladat: Adott az $ABCD$ tetraéder, ahol $A(4, 7, 6)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-1, 5, 3)$ és $D(4, -5, 2)$.

- Határozzuk meg a tetraéder ABC és BCD oldallapjai által bezárt szögét!
- Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéderben az ABC oldallap és az AD oldalegyenes által bezárt szöget!

Megoldás

- Két sík hajlásszöge megadható, ha ismerjük a síkok normálvektorainak hajlásszögét, tehát nem kell a síkok egyenletét felírni, elég a normálvektort ismerni. Ezért állítsuk elő a feladatban szereplő síkok egy-egy normálvektorát.

Az ABC oldallap normálvektora egy olyan vektor lehet, amely merőleges az ABC síkra. Az adatokból ismerhetünk két olyan vektort, amely benne van az említett síkban, ezek az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok. A keresett normálvektor mindkét vektorra merőleges, tehát adódik, hogy válasszuk normálvektornak az $\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -6, -8) \quad \overrightarrow{AC} = (-5, -2, -3),$$

$$\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -6 & -8 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (2, 28, -22),$$

$$\mathbf{n}_{ABC} = \sqrt{2^2 + 28^2 + (-22)^2} = 2\sqrt{318}$$

Hasonló megfontolások alapján a BCD oldallap egy normálvektora pedig legyen $\mathbf{n}_{BCD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{BD} = (4, -6, 4) \quad \overrightarrow{BC} = (-1, 4, 5)$$

$$\mathbf{n}_{BCD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-46, -24, 10)$$

$$\mathbf{n}_{BCD} = \sqrt{(-46)^2 + (-24)^2 + 10^2} = 2\sqrt{698}.$$

Ekkor:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_{ABC}, \mathbf{n}_{BCD} \rangle}{\|\mathbf{n}_{ABC}\| \|\mathbf{n}_{BCD}\|} = \frac{2 \cdot (-46) + 28 \cdot (-24) + (-22) \cdot 10}{2\sqrt{318} \cdot 2\sqrt{698}} =$$

$$= \frac{-984}{4\sqrt{221964}} \quad \varphi \approx 121,48^\circ$$

Mivel $90^\circ < \varphi$, ezért a két sík hajlásszöge:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi \approx 180^\circ - 121,48^\circ \approx 58,52^\circ.$$

- b) A hajlásszög meghatározásához elegendő ismerni az ABC oldallap egy normálvektorát és az AD oldalegyenes egy irányvektorát. Használjuk fel, hogy az előző részben már meghatároztuk az ABC oldallap egy normálvektorát:

$$\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 28, -22)$$

Az AD oldalegyenes egy irányvektora lehetne az:

$$\overrightarrow{AD} = (0, -12, -4).$$

Ekkor a keresett szög:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n}_{ABC} \rangle}{\|\overrightarrow{AD}\| \|\mathbf{n}_{ABC}\|} = \frac{0 \cdot 2 + (-12) \cdot 28 + (-4) \cdot (-22)}{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 28^2 + (-22)^2}} = \\ &= \frac{-248}{4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{318}} \approx -0,5497 \quad \varphi \approx 123,35^\circ. \end{aligned}$$

Mivel $90^\circ < \varphi$, ezért a keresett hajlásszög:

$$\alpha = \varphi - 90^\circ \approx 123,35^\circ - 90^\circ \approx 33,35^\circ.$$

Ellenőrző kérdések

- 17. kérdés** Írja fel az ABC háromszög síkjának egyenletét, ha $A(2, -1, 5)$, $B(-3, -4, 1)$ és $C(6, 5, -1)$!

$$20x - 3y + 2z = 53$$

$$x - y + z = 8$$

$$21x - 23y - 9z = 20 \quad (\mathbf{X})$$

$$4x - 2y + 2z = 20$$

- 18. kérdés** Határozza meg az $A(1, -5, 2)$ pont és az $e: x = 4, y = -2 + 2t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes közös síkjának egyenletét!

$$13x + 9y + 6z = -20$$

$$13x - 9y - 6z = 46$$

$$13x - 9y + 6z = 70 \quad (\mathbf{X})$$

$$13x + 9y - 6z = -44$$

- 19. kérdés** Adott egy háromszög két csúcsa és a súlypontja. Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét, ha $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 3)$ és $S(2, 1, 3)$.

$$x = 6 + 7t, y = 1 + t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = 6 + 7t, y = 1 + t, z = t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x = -1 + 7t, y = t, z = 3 \quad t \in \mathbb{R} \quad (\mathbf{X})$$

$$x = -1 + 7t, y = t, z = 3t \quad t \in \mathbb{R}$$

- 20. kérdés** Adott az $ABCD$ tetraéder, ahol $A(4, 7, 6)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-1, 5, 3)$ és $D(4, -5, 2)$. Határozzuk meg a tetraéderben az AB oldal felezőmerőleges síkjának és a CD oldal egyenesének hajlásszögét!

23,39° (X)

66,61°

27,65°

63,35°